

CHAPITRE V

***IDENTIFICATION ET MODELISATION D'UN
SYSTEME HYDRO-ENERGETIQUE DU DOUBS.
APPLICATION A LA SIMPLIFICATION DE LA
GESTION DES RESSOURCES D'EAU***

I. Introduction

Comme application à notre thèse, nous allons étudier le système de production hydro-énergétique Jura-Morvan, situé sur le cours de la rivière du Doubs en Franche-Comté. Ce système est formé de sept centrales, alimentées par cinq retenues d'eau.

Dans le contexte actuel, le rôle d'un tel aménagement est double : énergétique et écologique. En effet, mis à part la production d'énergie électrique, le système doit compenser les fluctuations du niveau du Doubs en périodes de crue ou de sécheresse, tout en assurant le débit d'eau nécessaire au bon développement de la faune et de la flore aquatiques. Par conséquent, il est essentiel d'exploiter de façon rationnelle les ressources d'eau disponibles.

Dans notre étude, nous proposons une modélisation de la gestion des ressources d'eau, dans le but de l'intégrer dans la commande du système hydro-énergétique. Pour exploiter de façon optimale les ressources d'eau de la rivière, nous imposons des contraintes d'ordre économique, concernant la minimalisation des débits non productifs. La prise en compte du caractère aléatoire des apports d'eau exige l'introduction d'un modèle stochastique, d'où l'intérêt d'utiliser les chaînes de Markov.

L'état du système est représenté par l'ensemble des volumes d'eau dans les retenues et la commande est donnée par les débits turbinés. Chaque barrage est ainsi modélisé à l'aide d'une chaîne de Markov à commande.

La prise en compte de tous les états du système abouti à un modèle global de dimension très importante. Ceci nous incite à utiliser des méthodes de simplification en vue de réduire l'ordre du système. Pour cela, nous utilisons les techniques développées dans le chapitre précédent.

Le principe de la réduction en régime permanent fait appel à la propriété de double échelle de pondération des chaînes de Markov qui modélisent chaque barrage. Par conséquent, l'étude globale du système prend en considération uniquement les combinaisons d'états les plus probables. Ensuite nous simplifions le calcul de la commande optimale du modèle réduit, en utilisant les perturbations singulières.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons quelques éléments généraux concernant la production hydro-énergétique française. Par la suite, nous identifions les paramètres de base qui interviennent dans le système. La modélisation de la gestion des ressources d'eau sous forme de chaîne de Markov fait l'objet de la troisième partie du chapitre. Les deux derniers paragraphes sont dédiés à la commande optimale locale et globale du système, en mettant l'accent sur les méthodes de simplification du calcul de la commande.

II. Généralités sur la production hydro-énergétique en France

La place de l'énergie hydraulique dans le système énergétique français a changé au cours des dernières décennies. Si dans le passé elle constituait une source très importante d'énergie électrique, elle joue actuellement plutôt un rôle de compensation des fluctuations de la demande énergétique satisfaite essentiellement par l'énergie nucléaire (figure V.1).

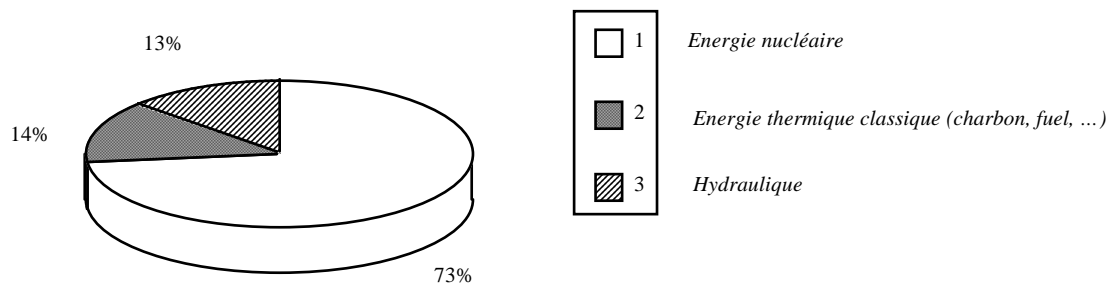


Fig. V.1. Proportion des productions d'énergie électrique en France.

Une des missions qui a de plus en plus d'importance dans le système hydro-énergétique français concerne la gestion économique et écologique des ressources d'eau. Les retenues des barrages sont capables d'assurer un flux régulier des cours d'eau et de palier aux fluctuations imposées par le changement de climat.

En 1991, la production totale d'électricité en France était de 433 milliards de kWh. Pour satisfaire les variations des multiples besoins d'électricité, les différentes productions d'énergie du réseau français sont complémentaires. L'équilibre entre ces productions tout au long d'une journée est illustré dans la figure suivante :

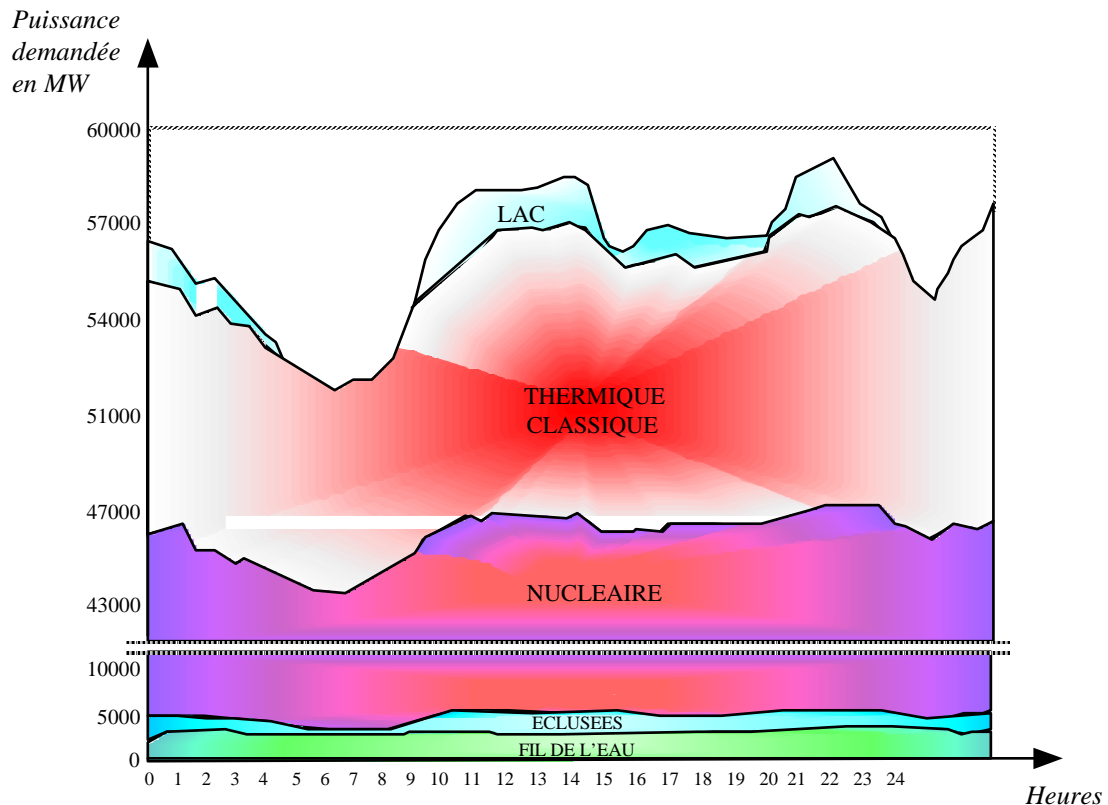


Fig. V.2. Configuration des différentes sources d'énergie au long de la journée.

Pour que l'électricité fournie à chaque instant soit la moins chère possible, il faut utiliser les diverses sources d'énergie de façon rationnelle, en allant des moins chères aux plus coûteuses. Les pilotes du réseau d'Electricité de France les classent dans l'ordre suivant :

- les barrages de basse chute : ils sont adaptés aux cours d'eau à faible pente et à fort débit. Ils fonctionnent en permanence, puisqu'ils turbinent l'eau de la rivière qui les traverse.
- les centrales nucléaires : elles sont économiques et assurent la production de base de l'électricité.
- les centrales thermiques classiques (charbon, fuel, ...) : elles brûlent des combustibles coûteux.
- les barrages de moyenne chute : ils sont situés sur des cours d'eau à pente moyenne et à débit abondant. Leur capacité est souvent inférieure à celle des hautes chutes.
- les barrages de haute chute : construits en montagne, ils possèdent des débits faibles pour des dénivelées importantes. L'eau de la retenue est dirigée par les galeries (ou canaux) et conduites forcées vers les turbines.
- les stations de transfert d'énergie par pompage : depuis la retenue amont, l'eau descend vers les turbines aux heures de pointe. Un bassin inférieur la stocke. Aux heures creuses, elle est remontée en réserve dans la retenue amont par pompage.
- les turbines gaz : performantes, mais très coûteuses en combustible.

Notre étude concerne les sources d'énergie hydro-énergétique. Cette énergie est indispensable pour gérer les fluctuations permanentes de la demande d'électricité. Elle permet de valoriser la force motrice des cours d'eau, qu'on appelle aussi *houille blanche* et représente la seule énergie renouvelable qui compte actuellement dans le champ économique.

L'ensemble des barrages construits pour produire de l'électricité retient jusqu'à 7 milliards m^3 d'eau. Parmi les paramètres qui caractérisent l'hydroélectricité en France [EDF, 92] nous retenons :

- une puissance installée de 25 000 MW (un débit de $1 \text{ m}^3/\text{seconde}$ sous une chute de $1 \text{ m} = 8 \text{ kW}$)
- une énergie productible de 70 000 GWh (un volume de 1 m^3 d'eau sous une chute de $450 \text{ m} = 1 \text{ kWh}$)
- l'équivalence énergétique de la production hydraulique est de 15,5 Mtep ($1 \text{ tep} = 1 \text{ tonne équivalent pétrole} = 4500 \text{ kWh}$).

Les barrages construits par EDF ont d'abord un but énergétique. Cependant, le problème de l'environnement bénéficie d'une place de plus en plus importante dans la gestion des ressources d'eau utilisées. Parmi les ouvrages hydrauliques EDF, les barrages de moyenne et haute chute permettent de stocker l'énergie. Leurs réserves et la rapidité de leur démarrage sont particulièrement adaptées à un fonctionnement épisodique indispensable pour répondre aux pointes de consommation, notamment hivernales.

L'énergie électrique doit être fournie sur le réseau en fonction des besoins des consommateurs. Les centrales hydrauliques dont la capacité de retenue du barrage est suffisante, turbinent "*en éclusée*" aux heures de pointe et participent à l'équilibre entre la production et la demande des clients. Les autres centrales, qui fonctionnent en continu, sont dites "*au fil de l'eau*".

Très souvent, un aménagement hydro-énergétique court-circuite un tronçon du cours d'eau sur lequel il est implanté : il dérive alors une partie du débit naturel pour alimenter ses turbines. L'autre partie, maintenue dans la rivière, ne participe pas à la production d'énergie (figure V.3).

Deux impératifs sont à concilier :

- assurer un *débit réservé* dans le tronçon court-circuité, garantissant au milieu aquatique des conditions acceptables pour la conservation des espèces animales et végétales.
- tirer le meilleur parti énergétique de l'aménagement hydro-énergétique, dans le cadre de la mission du Service Public.

Les débits réservés sont définis par une valeur minimum, qui est une fraction du module (débit moyen) du cours d'eau [EDF, 92] :

- module inférieur ou égal à $80 \text{ m}^3/\text{s}$:
le 1/40e pour les ouvrages anciens
- le 1/10e pour les ouvrages nouveaux
- module supérieur à $80 \text{ m}^3/\text{s}$:

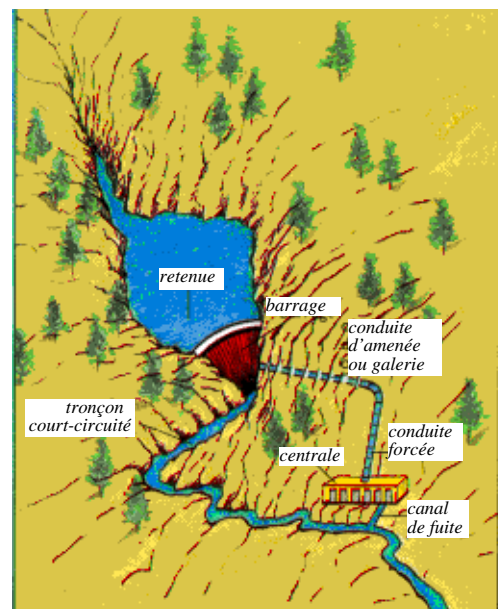


Fig. V.3. Principe de construction d'un barrage.

les valeurs ci-dessus sont divisées par 2.

Dans le cadre du système hydro-énergétique français, nous nous intéressons en particulier à un système de barrages de moyenne et basse chute, situé sur la rivière du Doubs, en région Franche-Comté.

III. Description du système hydro-énergétique étudié

Faisant partie du Groupe de Production Hydraulique Rhin, sous-groupe Jura-Morvan, le système de barrages hydro-énergétiques étudié est situé sur le cours supérieur du Doubs. Les centrales qui en font partie sont *Refrain*, *Vaufrey*, *Grosbois*, *Liebvillers*, *Dampjoux* et *La Prétière*. La première centrale de la vallée est celle de *Chatelot*. La figure V.4 présente la position géographique du système étudié :

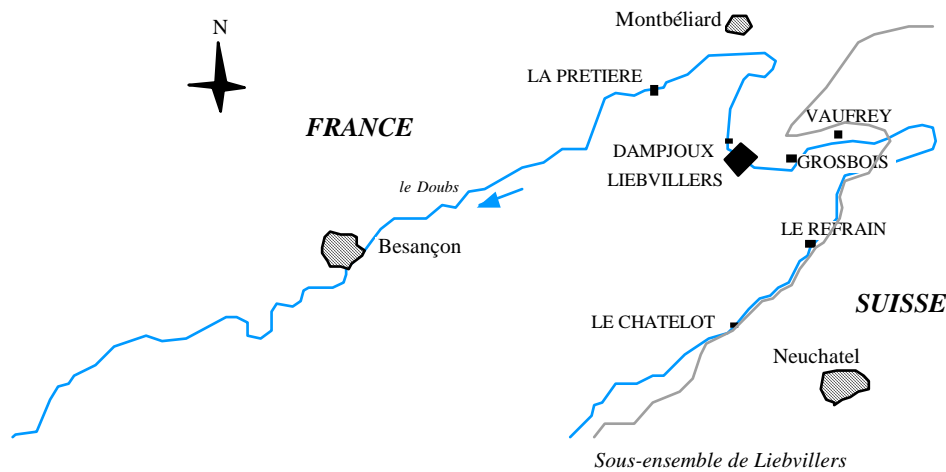


Fig. V.4. Géographie du système hydro-énergétique étudié.

Le profil du système hydro-énergétique le long du Doubs est présenté dans la figure suivante :

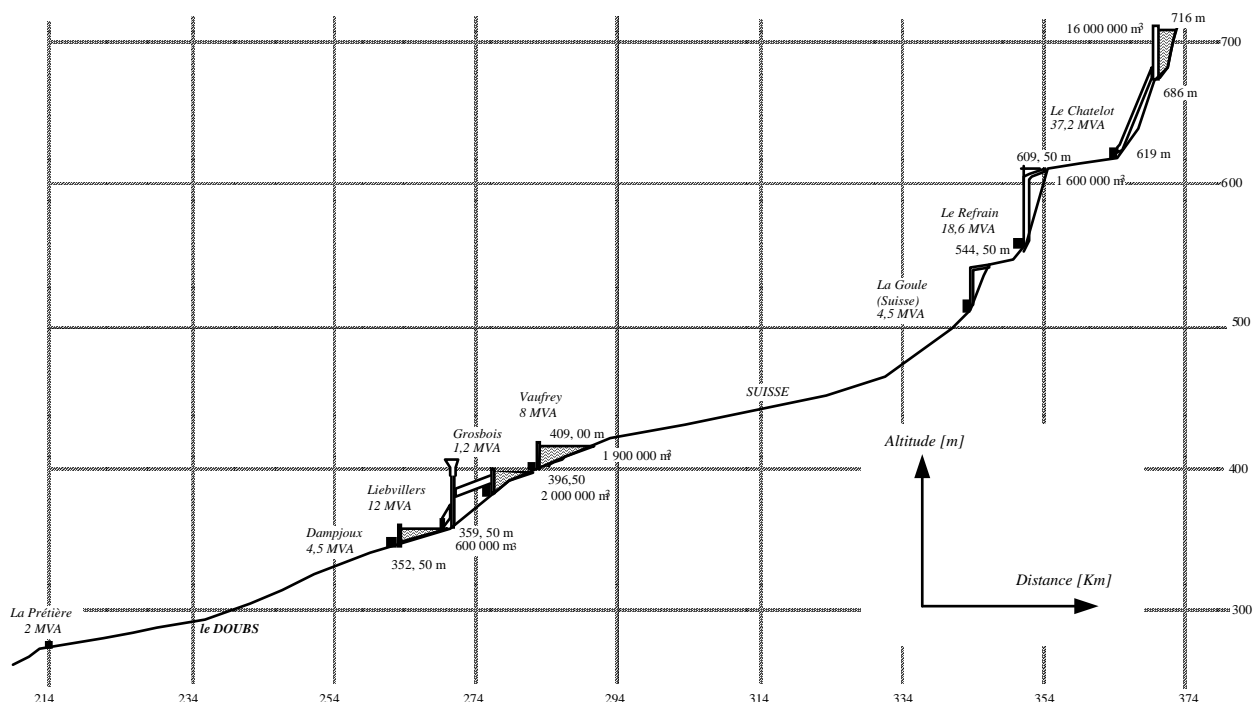


Fig. V.5. Profil du système hydro-énergétique le long du Doubs.

Pour l'instant, la commande de la centrale du Chatelot se fait séparément (la partie suisse par ENSA et la partie française par le CRES). Une étude complète du système ainsi qu'une utilisation plus rationnelle des ressources d'eau exige la mise au point d'une commande globale, dans laquelle la commande de cette centrale puisse se faire en tenant compte des centrales se trouvant en aval. L'aménagement du Chatelot est très important non seulement parce qu'il est le premier de la vallée, mais aussi parce que le volume utile de sa retenue est environ dix fois supérieur aux autres retenues.

Dans l'annexe 5 nous présentons une description détaillée des centrales étudiées ainsi que des aménagements et des barrages correspondants. Les paramètres les plus importants du système sont regroupés dans le tableau V.1 [EDF, 92] :

Nom de la centrale	Nature	Capacité utile du réservoir (10 ⁶ m ³)	Débit max. turbin. (m ³ /s)	Coeff. énergétique (kWh/m ³)	Chute brute max. (m)	Nbr groupes	Puissance unitaire (MW)	Puissance totale (MW)	Puissance max. de l'heure (MW)	Productibilité annuelle moyenne (GWh)
CHATELOT	E	16,000	44 (France 22)	0,198	97,00	2	15,000	30,000	30,000	100 (France 50)
REFRAIN	E	1,600	23,0	0,130	66,31	1 2	3,200 4,380	12,000	11,100	60,0
VAUFREY	E	1,500	70,0	0,024	12,80	2	3,200	6,400	6,300	21,5
GROSBOIS	F	1,500	15,5	0,020	12,50	1 1	1,100 0,040	1,140	1,100	2,8
LIEBVILLERS	E	(Grosbois)	44,0	0,054	40,50	4	2,400	9,600	9,000	47,0
DAMPJOUX	E (F)	0,500	105,0	0,012	7,00	2 1	1,800 1,300	4,900	3,700	14,4
LA PRETIERE	F	—	42,0	0,010	7,50	3	0,504	1,500	1,500	10,0

Tableau V.1. Principales caractéristiques du système hydro-énergétique étudié.

(E = éclusée ; F = au fil de l'eau)

Nous remarquons que sur les 7529,3 GWh produits en moyenne par les centrales du groupe de production hydraulique Rhin, le groupement de Liebvillers en produit 205,7 GWh.

IV. Modélisation du système

IV.1. Identification du processus

Dans un premier temps, nous identifions les éléments qui interviennent dans la description d'un aménagement énergétique (barrage + centrale), en généralisant par la suite à l'ensemble du système étudié.

IV.1.1. Description des éléments d'un aménagement hydro-énergétique

Conformément aux éléments présentés dans la figure V.3, un aménagement hydro-énergétique peut être représentée par le schéma suivant :

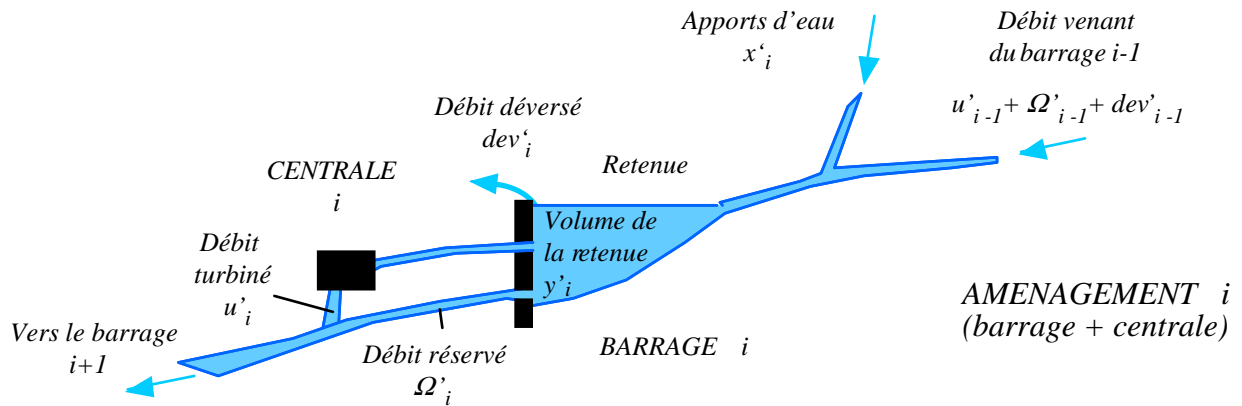


Fig. V.6. Identification des entrées-sorties et des paramètres caractéristiques d'un aménagement hydro-énergétique.

pour lequel nous avons noté par :

- u'_i [m^3/s] : le débit turbiné par la centrale i ,
- $u'_{i_{max}}$ [m^3/s] le débit maximum turbinable par la centrale i ,
- y'_i [$1 \text{ Mm}^3 = 10^6 \text{ m}^3$] : la réserve utile d'eau stockée par le barrage de la centrale i ,
- $y'_{i_{max}}$ [Mm^3] représente le maximum de la réserve utile d'eau stockée par le barrage i ,
- x'_i [m^3/s] : l'apport d'eau entre la centrale $i-1$ et la centrale i ,
- Ω'_i [m^3/s] : le débit réservé en aval du barrage i ,
- ω'_i [m^3/s] le débit minimum réservé en aval du barrage i .
- dev'_i [m^3/s] : le débit déversé par le barrage i .

IV.1.2. Modélisation de l'aménagement hydro-énergétique

La variation du stock d'eau dans la retenue peut être obtenue par la somme des débits entrant dans le barrage moins la somme des débits sortants. Nous pouvons écrire pour un aménagement i [DEL, 78] :

$$10^6 dy'_i = \left(x'_i + u'_{i-1} + \Omega'_{i-1} + dev'_{i-1} - u'_i - \Omega'_i - dev'_i \right) dt \quad (V.1)$$

avec $0 \leq u'_i \leq u'_{i_{\max}}$

$0 \leq y'_i \leq y'_{i_{\max}}$

$\omega'_i \leq \Omega'_i$

$0 \leq dev'_i$

et le temps continu t mesuré en secondes.

La *commande* exercée au niveau de la centrale est représentée par le débit turbiné u'_i . L'*état* du barrage est représenté par la réserve utile d'eau de sa retenue y'_i . L'énergie W_i [MWh] produite à l'instant t par la centrale i est fonction du volume d'eau de la retenue et du débit turbiné à cet instant. Nous avons ainsi pour chaque centrale [DEL, 78] :

$$W_i(t) = f_i(u'_i(t), y'_i(t)) \quad (V.2)$$

où f_i est une fonction continue strictement croissante, qui dépend du nombre et du type de turbines équipant la centrale, ainsi que de l'aménagement de sa retenue d'eau.

IV.1.3. Description du système hydro-énergétique étudié

Avec les éléments de base ainsi définis, nous pouvons introduire les mêmes notations pour tout le système hydro-énergétique. Dans la figure suivante nous présentons ainsi les sept centrales et des cinq barrages qui font partie du système hydro-énergétique Jura-Morvan :

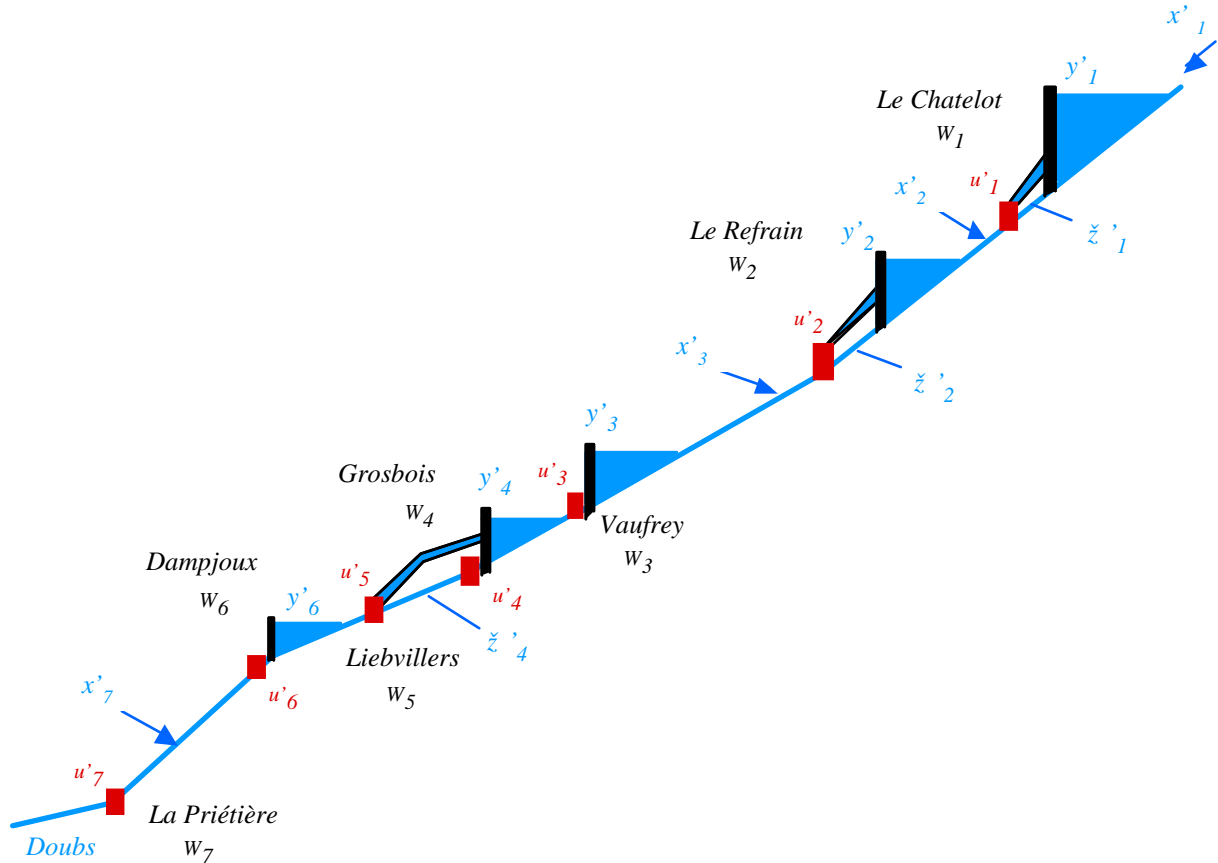


Fig. V.7. Schéma du système hydro-énergétique étudié.

Dans ce schéma, l'apport x'_1 qui alimente le barrage du Chatelot représente le débit du Saut du Doubs (plus précisément le lac des Brenets). Les centrales du Chatelot et Refrain sont équipées de galeries d'amenée et par conséquent les barrages correspondants doivent assurer en aval les débits réservés Ω'_1 et Ω'_2 . La centrale de Vaufrey turbine directement à la sortie de son barrage. Le problème du débit réservé ne se pose pas dans ce cas, puisque la retenue de Grosbois commence juste au pied du barrage de Vaufrey. En ce qui concerne les centrales de Grosbois et Liebwillers, elles turbinent toutes les deux à partir de la retenue du barrage de Grosbois, en aval duquel la centrale de Grosbois se charge d'assurer le débit réservé Ω'_4 .

Dans le système ainsi défini, le rôle des débits réservés Ω'_i ($i = 1, 2, 4$) est d'assurer un débit d'eau suffisant pour protéger la faune et la flore aquatiques, ainsi que pour l'irrigation des terrains agricoles. Pour chaque barrage, les débits réservés doivent être supérieurs à une valeur minimum imposée ω'_i :

$$\Omega'_1 \geq \omega'_1 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Omega'_2 \geq \omega'_2 = 0,25 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Omega'_4 \geq \omega'_4 = 4 \text{ m}^3/\text{s}$$

Il arrive parfois que les barrages débordent, ce qui entraîne des débits déversés dev'_i . Ceci représente une perte d'énergie. Dans ce sens, une bonne gestion du système peut éviter ce déversement.

Les paramètres qui servent à commander le système sont notés par des u_i dont les limites supérieures $u_{i\max}$ sont spécifiées dans les données techniques de chaque installation (voir tableau V.1) :

- $u_1 \in [0 ; 44] \text{ m}^3/\text{s}$: débit turbiné par la centrale du *Chatelot* ,
- $u_2 \in [0 ; 23] \text{ m}^3/\text{s}$: débit turbiné par la centrale du *Refrain* ,
- $u_3 \in [0 ; 70] \text{ m}^3/\text{s}$: débit turbiné par la centrale de *Vaufrey* ,
- $u_4 \in [4 ; 15,5] \text{ m}^3/\text{s}$: débit turbiné par la centrale de *Grosbois* ,
- $u_5 \in [0 ; 44] \text{ m}^3/\text{s}$: débit turbiné par la centrale de *Liebvillers* ,
- $u_6 \in [0 ; 105] \text{ m}^3/\text{s}$: débit turbiné par la centrale de *Dampjoux* ,
- $u_7 \in [0 ; 42] \text{ m}^3/\text{s}$: débit turbiné par la centrale de *La Prétière* ,

avec $u_4 \geq \omega_4 = 4 \text{ m}^3/\text{s}$, le débit minimum réservé par la centrale de Grosbois.

ces paramètres peuvent être rassemblés dans un vecteur \mathbf{U} appelé le vecteur de commande :

$$\mathbf{U} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7]^T$$

Des barrages ont été prévus uniquement pour les centrales du Chatelot, Refrain, Vaufrey, Grosbois et Dampjoux. Les notations associées aux réserves utiles d'eau sont y_1, y_2, y_3, y_4 et y_6 avec les volumes maxima $y_{i\max}$ spécifiés dans les données techniques du système (tableau V.1) :

- $y_1 \in [0 ; 16] \text{ Mm}^3$: volume utile de la retenue de *Chatelot* ,
- $y_2 \in [0 ; 1,6] \text{ Mm}^3$: volume utile de la retenue de *Refrain* ,
- $y_3 \in [0 ; 1,5] \text{ Mm}^3$: volume utile de la retenue de *Vaufrey* ,
- $y_4 \in [0 ; 1,5] \text{ Mm}^3$: volume utile de la retenue de *Grosbois* ,
- $y_6 \in [0 ; 0,5] \text{ Mm}^3$: volume utile de la retenue de *Dampjoux* .

IV.1.4. Modélisation du système hydro-énergétique

La modélisation du système hydro-énergétique présente deux aspects. Tout d'abord, la production d'énergie électrique de toutes les centrales doit *satisfaire la demande d'énergie électrique*. Ensuite, il est nécessaire de faire une *gestion des ressources d'eau*, en prenant en compte les débits réservés et l'évolution des volumes d'eau dans les retenues.

La modélisation du système doit prendre en compte la durée nécessaire à l'eau pour parcourir la distance entre les aménagements hydro-énergétiques consécutifs. Par exemple, le débit $u_i(t)$ turbiné par l'usine i à l'instant t arrive au barrage $i+1$ après un temps δt , nécessaire au Doubs pour parcourir la distance entre l'usine i et le barrage $i+1$. Les durées correspondant au système étudié sont les suivantes [EDF, 92] :

- 2 h entre Chatelot et Le Refrain,
- 10 h entre Le Refrain et Vaufrey,
- 15 mn entre Vaufrey et le barrage de Grosbois,
- 1h15 entre le barrage de Grosbois et Dampjoux,
- 15 mn entre Liebvillers et Dampjoux et
- 10h entre Dampjoux et La Prétière.

a) Modèle mathématique associé aux ressources d'eau

L'écriture de la variation des retenues d'eau de chaque barrage donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} 10^6 dy'_1 = (x'_1(t) - u'_1(t) - \Omega'_1(t) - dev'_1(t)) dt \\ 10^6 dy'_2 = (u'_1(t) + \Omega'_1(t) + dev'_1(t) + x'_2(t) - u'_2(t) - \Omega'_2(t) - dev'_2(t)) dt \\ 10^6 dy'_3 = (u'_2(t) + \Omega'_2(t) + dev'_2(t) + x'_3(t) - u'_3(t) - dev'_3(t)) dt \\ 10^6 dy'_4 = (u'_3(t) + dev'_3(t) - u'_4(t) - u'_5(t) - dev'_4(t)) dt \\ 10^6 dy'_6 = (u'_4(t) + u'_5(t) + dev'_4(t) - u'_6(t)) dt \\ u'_7(t) = u'_6(t) + x'_7(t) \end{cases} \quad (V.3)$$

b) Modèle mathématique de l'énergie électrique

A l'instant t [s] la demande totale d'énergie électrique \mathcal{W} [MWh] de la partie française du système satisfait l'égalité suivante :

$$\mathbf{W}(t) = \frac{W_1(t)}{2} + W_2(t - \delta t_2) + W_3(t - \delta t_3) + W_4(t - \delta t_4) + W_5(t - \delta t_5) + W_6(t - \delta t_6) + W_7(t - \delta t_7) \quad (V.4)$$

où W_i représente l'énergie débitée par la centrale i ($i = 1, \dots, 7$ - ensemble des centrales) et δt_i représente le temps parcouru par le Doubs entre la centrale du Chatelot et la centrale i [EDF, 92]

Remarque

Dans la relation (V.4) nous considérons seulement la moitié de l'énergie électrique débitée par la centrale du Chatelot, suite au partage de cette énergie entre la France et la Suisse (voir annexe 5).

□

Dans sa politique de commande, EDF fait appel à une discrétisation du temps. Nous introduisons ce principe dans les modèles (V.3) et (V.4) obtenus.

IV.2. Modèle mathématique discret

La commande du système hydro-énergétique se fait pour une journée entière. Ceci nous permet de considérer la commande U constante sur l'intervalle de temps d'un jour. Une discrétisation classique de type Euler peut ainsi être appliquée pour construire les systèmes discrétisés exacts correspondant à (V.3) et (V.4) [FOS, 93].

La variable utilisée pour représenter le temps est une variable discrète notée par $n\Delta t$ avec $n \in \mathbb{N}$ et Δt correspondant à une période d'échantillonnage égale à une journée : $\Delta t = 24$ [h]. L'évolution du système considéré se trouve sous l'influence des lois climatiques périodiques de période 1 an. Par conséquent, l'échantillonnage proposé dans notre formalisation est suffisamment petit (par rapport à l'année) pour que l'approche donnée par la discrétisation soit satisfaisante.

De cette façon, les dérivées de l'état de l'équation (V.3) :

$$\frac{dy'_i}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y'_i(t+\Delta t) - y'_i(t)}{\Delta t}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

sont approchées par la forme suivante valable à l'instant $t = n \Delta t$:

$$\frac{dy'_i}{dt} \approx \frac{y'_i(t+\Delta t) - y'_i(t)}{\Delta t} = \frac{y'_i(n\Delta t + \Delta t) - y'_i(n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{y'_i((n+1)\Delta t) - y'_i(n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{y'_i(n+1) - y'_i(n)}{\Delta t}$$

et nous avons aussi :

$$\begin{aligned} u'_i(t) &\approx u'_i(n \Delta t) = u'_i(n), \quad x'_i(t) \approx x'_i(n \Delta t) = x'_i(n), \\ \Omega'_i(t) &\approx \Omega'_i(n \Delta t) = \Omega'_i(n), \quad dev'_i(t) \approx dev'_i(n \Delta t) = dev'_i(n). \end{aligned}$$

avec :

$u'_i(n)$ le débit moyen turbiné par la centrale i dans la journée n ,
 $x'_i(n)$ l'apport moyen dans la journée n ,
 $\Omega'_i(n)$ le débit réservé moyen,
 $dev'_i(n)$ le débit moyen déversé pendant la journée n .

□

a) Discrétisation du modèle des ressources d'eau

Il nous vient le modèle discret de l'ensemble du système :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y'_1(n+1) - y'_1(n)}{\alpha} &= x'_1(n) - u'_1(n) - \Omega'_1(n) - dev'_1(n) \\ \frac{y'_2(n+1) - y'_2(n)}{\alpha} &= u'_1(n) + \Omega'_1(n) + dev'_1(n) + x'_2(n) - u'_2(n) - \Omega'_2(n) - dev'_2(n) \\ \frac{y'_3(n+1) - y'_3(n)}{\alpha} &= u'_2(n) + \Omega'_2(n) + dev'_2(n) + x'_3(n) - u'_3(n) - dev'_3(n) \\ \frac{y'_4(n+1) - y'_4(n)}{\alpha} &= u'_3(n) + dev'_3(n) - u'_4(n) - u'_5(n) - dev'_4(n) \\ \frac{y'_6(n+1) - y'_6(n)}{\alpha} &= u'_4(n) + u'_5(n) + dev'_4(n) - u'_6(n) \\ u'_7(n) &= u'_6(n) + x'_7(n) \end{aligned} \right. \quad (V.5)$$

où $\alpha = \frac{\Delta t}{106}$ [s].

b) Discrétisation du modèle énergétique

Pour le calcul de l'énergie produite, l'exploitant fait appel à un coefficient énergétique moyen δ_i [kWh/m³] correspondant à chaque centrale. Par conséquent, dans la relation (V.2) la fonction f_i est approchée par la forme linéaire empirique suivante [EDF, 92] :

$$W_i(n) = 2 \cdot t \cdot \delta_i \cdot u'_i(n) \quad \text{avec } i=1, 2, \dots, 7 \quad \text{et } n=1, 2, \dots \quad (\text{V.6})$$

$\Delta t = 24 \cdot 3600 \text{ [s]} = 86,4 \cdot 10^3 \text{ [s]}$, l'intervalle de temps correspondant à une journée,

où nous avons les coefficients énergétiques de chaque centrale

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0,198 \text{ [kWh/m}^3\text{]} = 0,198 \cdot 10^{-3} \text{ [MWh/m}^3\text{]} \\ \delta_2 &= 0,130 \text{ [kWh/m}^3\text{]} = 0,130 \cdot 10^{-3} \text{ [MWh/m}^3\text{]} \\ \delta_3 &= 0,024 \text{ [kWh/m}^3\text{]} = 0,024 \cdot 10^{-3} \text{ [MWh/m}^3\text{]} \\ \delta_4 &= 0,020 \text{ [kWh/m}^3\text{]} = 0,020 \cdot 10^{-3} \text{ [MWh/m}^3\text{]} \\ \delta_5 &= 0,054 \text{ [kWh/m}^3\text{]} = 0,054 \cdot 10^{-3} \text{ [MWh/m}^3\text{]} \\ \delta_6 &= 0,012 \text{ [kWh/m}^3\text{]} = 0,012 \cdot 10^{-3} \text{ [MWh/m}^3\text{]} \\ \delta_7 &= 0,010 \text{ [kWh/m}^3\text{]} = 0,010 \cdot 10^{-3} \text{ [MWh/m}^3\text{]} \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Nous obtenons donc :

$$W_i(n) = \eta_i \cdot u'_i(n), \quad \text{où on a noté } \eta_i = 2 \cdot t \cdot \delta_i \quad (\text{V.8})$$

avec les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 17,1072 \text{ [MWh}\cdot\text{s/m}^3\text{]} \\ \eta_2 &= 11,232 \text{ [MWh}\cdot\text{s/m}^3\text{]} \\ \eta_3 &= 2,0736 \text{ [MWh}\cdot\text{s/m}^3\text{]} \\ \eta_4 &= 1,728 \text{ [MWh}\cdot\text{s/m}^3\text{]} \\ \eta_5 &= 4,6656 \text{ [MWh}\cdot\text{s/m}^3\text{]} \\ \eta_6 &= 1,0368 \text{ [MWh}\cdot\text{s/m}^3\text{]} \\ \eta_7 &= 0,864 \text{ [MWh}\cdot\text{s/m}^3\text{]} \end{aligned}$$

représentant le rendement de chaque centrale.

Nous considérons que la journée n est différente d'un barrage à l'autre, de telle façon que le temps nécessaire au Doubs pour parcourir la distance entre deux barrages soit égal au décalage des journées correspondantes [EDF, 92]. Nous avons ainsi une journée qui débute à :

- 5h pour Chatelot,
- 7h pour Le Refrain,
- 17h pour Vaufrey,
- 17h15 pour Grosbois,
- 18h15 pour Liebvillers,
- 18h30 pour Dampjoux et
- à 4h30 pour La Prétière.

Nous remarquons que les débuts des journées de gestion de toutes les centrales font partie de la même journée. Par conséquent, nous pouvons estimer que la demande totale d'énergie est distribuée dans la même journée n entre les barrages du système.

En considérant les notations (V.8), le modèle énergétique discret s'écrit :

$$W(n) = \frac{W_1(n)}{2} + W_2(n) + W_3(n) + W_4(n) + W_5(n) + W_6(n) + W_7(n) \quad (\text{V.9})$$

ou sous une forme détaillée :

$$W(n) = \frac{\eta_1 u'_1(n)}{2} + \eta_2 u'_2(n) + \eta_3 u'_3(n) + \eta_4 u'_4(n) + \eta_5 u'_5(n) + \eta_6 u'_6(n) + \eta_7 u'_7(n)$$

IV.3. Changement de variables

Les variables qui interviennent dans les modèles (V.5) et (V.9) sont d'un ordre de grandeur différent voir très différent. Pour homogénéiser ces variables et pour obtenir des modèles bien conditionnés, nous introduisons les changements de variables suivants :

$$y_i = \frac{y'_i}{y'_{i\max}} \in [0, 1], \text{ À } i = 1, 2, 3, 4, 6, \text{ représentant le volume utile relatif de la retenue,}$$

$$u_i = \frac{u'_i}{u'_{i\max}} \in [0, 1], \text{ À } i = 1, \dots, 7, \text{ représentant le débit turbiné relatif,}$$

$$x_i = \frac{x'_i}{u'_{i\max}}, \text{ À } i = 1, 2, 3, 7, \text{ représentant l'apport relatif,}$$

$$\text{dev}_i = \frac{\text{dev}'_i}{u'_{i\max}}, \text{ À } i = 1, 2, 4, \text{ représentant le débit déversé relatif,}$$

$$\Omega_i = \frac{\Omega'_i}{u'_{i\max}}, \text{ À } i = 1, 2, 3, 4, \text{ représentant le débit réservé relatif,}$$

$$\omega_i = \frac{\omega'_i}{u'_{i\max}}, \text{ À } i = 1, 2, 4, \text{ représentant le débit minimum réservé relatif,}$$

$$k_i = \frac{u'_{i-1\max}}{u'_{i\max}}, \text{ À } i = 2, \dots, 7$$

et $h_i = \frac{u'_{i\max}}{y'_{i\max}}, \text{ À } i = 1, 2, 3, 4, 6.$

Nous obtenons ainsi des variables sans dimension (sauf dans le cas de h_i [$\mu s = 10^{-6}s$]).

Les modèles mathématiques associés au système deviennent par la suite :

- modèle des ressources d'eau

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(n+1) - y_1(n) = \alpha h_1 (x_1(n) - u_1(n) - \Omega_1(n) - \text{dev}_1(n)) \\ y_2(n+1) - y_2(n) = \alpha h_2 (x_2(n) + k_2 (u_1(n) + \Omega_1(n) + \text{dev}_1(n)) - u_2(n) - \Omega_2(n) - \text{dev}_2(n)) \\ y_3(n+1) - y_3(n) = \alpha h_3 (x_3(n) + k_3 (u_2(n) + \Omega_2(n) + \text{dev}_2(n)) - u_3(n) - \text{dev}_3(n)) \\ y_4(n+1) - y_4(n) = \alpha h_4 \left(k_4 (u_3(n) + \text{dev}_3(n)) - u_4(n) - \text{dev}_4(n) - \frac{1}{k_5} u_5(n) \right) \\ y_6(n+1) - y_6(n) = \alpha h_6 (k_6 k_5 (u_4(n) + \text{dev}_4(n)) + k_6 u_5(n) - u_6(n)) \\ u_7(n) = k_7 u_6(n) + x_7(n) \end{array} \right. \quad (V.10)$$

- modèle énergétique

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(n) = & \frac{\eta_1 u'_{1_{\max}} u_1(n)}{2} + \eta_2 u'_{2_{\max}} u_2(n) + \eta_3 u'_{3_{\max}} u_3(n) + \eta_4 u'_{4_{\max}} u_4(n) + \\ & + \eta_5 u'_{5_{\max}} u_5(n) + \eta_6 u'_{6_{\max}} u_6(n) + \eta_7 u'_{7_{\max}} u_7(n) \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

IV.4. Commande du système

La commande du système hydro-énergétique étudié consiste à distribuer la demande globale $\mathcal{W}(n)$ sur l'ensemble des centrales, tout en respectant les contraintes économiques suivantes :

- 1°. il n'y a pas de déversement ($\text{dev}_i = 0$) ;
- 2°. les débits réservés Ω_i sont à leurs valeurs minima ω_i ($\Omega_i = \omega_i$). Ces débits représentent des débits non turbinés qui correspondent à des pertes du point de vue énergétique.

En tenant compte de ces contraintes dans le modèle (V.10), celui-ci se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} y_1(n+1) - y_1(n) = \alpha h_1 (x_1(n) - u_1(n) - \omega_1) & (\text{a}) \\ y_2(n+1) - y_2(n) = \alpha h_2 (x_2(n) + k_2 (u_1(n) + \omega_1) - u_2(n) - \omega_2) & (\text{b}) \\ y_3(n+1) - y_3(n) = \alpha h_3 (x_3(n) + k_3 (u_2(n) + \omega_2) - u_3(n)) & (\text{c}) \\ y_4(n+1) - y_4(n) = \alpha h_4 \left(k_4 u_3(n) - u_4(n) - \frac{1}{k_5} u_5(n) \right) & (\text{d}) \\ y_6(n+1) - y_6(n) = \alpha h_6 (k_6 k_5 u_4(n) + k_6 u_5(n) - u_6(n)) & (\text{e}) \\ u_7(n) = k_7 u_6(n) + x_7(n) & (\text{f}) \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

L'optimisation de la gestion des ressources d'eau consiste à obtenir une variation nulle du volume d'eau des retenues, d'une journée à l'autre :

$$y_i(n+1) - y_i(n) = 0 \quad (\text{V.13})$$

Cette condition d'optimalité est liée à l'aspect écologique de la gestion des ressources d'eau. Elle laisse la liberté à l'utilisateur de travailler soit au fil de l'eau soit en éclusé, en fonction des conditions spécifiques d'exploitation du système. Par exemple, pour le système hydro-énergétique Jura-Morvan, une étude [EDF, 92] a révélé l'avantage de la gestion en éclusé par rapport à la gestion au fil de l'eau, suite au faible coût de l'énergie produite.

En introduisant (V.13) dans les équations (V.11) et (V.12), nous obtenons les commandes des centrales en fonction des apports aléatoires x_i ($i = 1, 2, 3$ et 7) et de la demande d'énergie \mathcal{W} :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_1(n) = x_1(n) - \omega_1 \\
 u_2(n) = x_2(n) + k_2 x_1(n) - \omega_2 \\
 u_3(n) = x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n)) \\
 u_4(n) = \xi k_5 k_4 \gamma_5 u'_{5\max} [x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n))] - \xi \{ \mathbf{W}(n) - \\
 - \frac{1}{2} \eta_1 u'_{1\max} [x_1(n) - \omega_1] - \eta_2 u'_{2\max} [x_2(n) + k_2 (x_1(n) - \omega_2)] - \\
 - \eta_3 u'_{3\max} [x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n))] - \eta_6 u'_{6\max} k_6 k_5 k_4 [x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n))] - \\
 - \eta_7 u'_{7\max} k_7 k_6 k_5 k_4 [x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n))] - \eta_7 u'_{7\max} x_7(n) \} \\
 u_5(n) = k_5 k_4 [x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n))] - k_5 u_4(n) \\
 u_6(n) = k_6 k_5 k_4 [x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n))] \\
 u_7(n) = k_7 k_6 k_5 k_4 [x_3(n) + k_3 (x_2(n) + k_2 x_1(n))] + x_7(n)
 \end{array} \right. \quad (V.14)$$

avec $\xi = \frac{1}{k_5 \eta_5 u'_{5\max} - \eta_4 u'_{4\max}}$

L'application des commandes données par (V.14) pose de nombreux problèmes suite à l'évolution aléatoire des apports et de la demande d'énergie électrique. Il est ainsi pratiquement impossible d'assurer une variation nulle des volumes d'eau des retenues. La seule solution consiste à établir une politique de commande capable de minimiser la variation de ces volumes :

$$\min | y_i(n+1) - y_i(n) |$$

Ceci demande une analyse statistique des éléments aléatoires qui interviennent dans le système. Une telle analyse exige l'introduction d'un modèle de type aléatoire. Le caractère discret de la variable temps associée au processus de gestion mis en place par EDF (gestion pour une durée de 24 heures) impose l'utilisation d'un modèle aléatoire de type discret.

Dans le système hydro-énergétique étudié, les opérateurs EDF prennent en considération principalement les apports d'eau de la journée précédente pour estimer les apports d'eau de la journée suivante. Nous nous retrouvons donc dans le cas d'une approche qui fait abstraction de l'évolution passée du système, en mémorisant uniquement son comportement durant la journée précédente. Cette propriété correspond à la propriété de Markov et demande par conséquent l'utilisation d'un modèle mathématique de ce type.

Nous concluons que le modèle qui correspond à notre étude doit être un modèle aléatoire discret de type markovien. On retrouve ainsi les propriétés d'une chaîne de Markov.

IV.5. Modélisation de la gestion des ressources d'eau à l'aide des chaînes de Markov

IV.5.1. Définition des états du système

L'introduction du modèle markovien demande tout d'abord la spécification de l'état du système. Dans ce sens, nous remarquons que les volumes d'eau existants dans les retenues des barrages constituent un indicateur déterminant. La gestion de l'eau s'avère d'autant plus

économique et efficace, que les variations de ces volumes sont réduites. Par conséquent, nous considérons l'état du système comme étant formé par l'ensemble des volumes utiles y_i retenus par tous les barrages du système.

A partir de l'équation (V.12)-d,e nous remarquons que les apports aléatoires ne contribuent pas directement à l'évolution du stock y_4 et y_6 . Par conséquent, l'étude des volumes utiles des retenues de Grosbois et Dampjoux peut se faire à l'aide de méthodes déterministes. Dans notre modèle aléatoire, nous considérons uniquement les volumes d'eau des retenues de Chatelot, Refrain et Vaufrey. L'état de la chaîne de Markov modélisant le processus de gestion de l'eau présente ainsi 3 composantes : y_1 , y_2 et y_3 .

La discrétisation de l'espace d'état dans la chaîne de Markov se fait en considérant N_i niveaux du volume de chaque retenue i . Par conséquent, le volume de la retenue du barrage i peut prendre les valeurs suivantes :

$$y_i^1, y_i^2, \dots, y_i^{N_i}$$

Plus le nombre N_i de niveaux considérés est élevé, plus l'étude est précise et les résultats concluants. Dans notre étude, nous considérons dix intervalles de variation du niveau d'eau :

$$N_i = 11, \quad i = 1, 2, 3 \text{ (Chatelot, Refrain et Vaufrey).}$$

Une telle partition confère un degré suffisamment détaillé d'analyse de l'évolution des stocks d'eau. Elle donne la possibilité de connaître le comportement du volume des retenues avec la précision d'un dixième du volume utile maximal. Dans ce cas, la chaîne de Markov comporte un nombre de $11 \times 11 \times 11 = 1331$ états.

IV.5.2. Calcul des probabilités de transition du modèle

Le problème qui se pose une fois l'état défini, c'est la quantification des probabilités de transition entre les états du modèle. En considérant par exemple deux états e_α et e_β de la chaîne de Markov

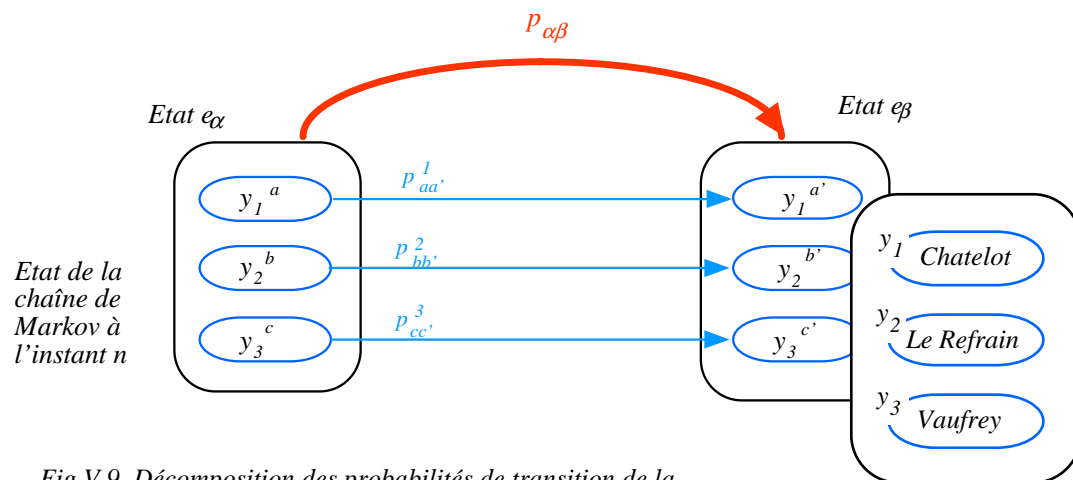


Fig.V.9. Décomposition des probabilités de transition de la chaîne de Markov.

Fig. V.8. Etat de la chaîne de Markov.

nous pouvons écrire la probabilité de transition $p_{\alpha\beta}$ en fonction des probabilités p^i de passage

entre les états de chaque barrage i . Les évolutions des trois réserves d'eau étudiées sont indépendantes et par conséquent nous pouvons utiliser le principe des probabilités composées. Avec les notations de la figure V.9, nous obtenons ainsi :

$$P_{\alpha\beta} = P_{aa}^1 \times P_{bb}^2 \times P_{cc}^3 \quad (V.15)$$

Le calcul des probabilités de transition de la chaîne de Markov repose donc sur le calcul des probabilités de transition entre les différents niveaux de chaque retenue. Ceci revient à construire une chaîne de Markov élémentaire associée à l'évolution de la réserve d'eau de chaque barrage :

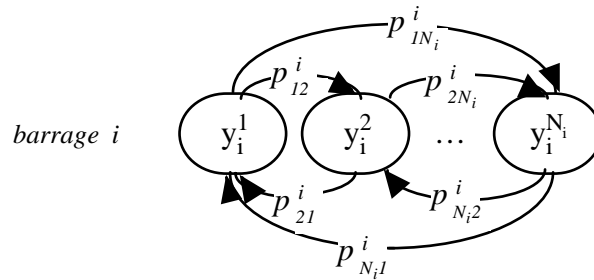


Fig.V.10. Graphe de la chaîne de Markov élémentaire concernant la gestion du barrage i .

a) Etude de l'évolution du volume d'eau de la retenue du barrage de Chatelot

Le modèle mathématique d'évolution des ressources d'eau du barrage de Chatelot est exprimé par l'équation (V.12)-a :

$$y_1(n+1) - y_1(n) = \alpha h_1 (x_1(n) - u_1(n) - \omega_1) \quad (V.16)$$

La variable aléatoire indépendante qui intervient dans cette équation est l'apport x_1 , représentant le débit du lac des Brenets. Le calcul des probabilités de variation de y_1 exige une analyse statistique de x_1 . En étudiant les données correspondant à une période de deux ans à l'aide du logiciel Siman/Arena, nous obtenons les paramètres d'évolution de l'apport réel x'_1 :

- apport moyen des Brenets : 16,1 m³/s ;
- déviation standard : 30,3 m³/s ;
- apport maximum = 318 m³/s , apport minimum = 1,54 m³/s ;

avec une variation du type :

$$x'_1 = 1 + \xi \quad (V.17)$$

La variable aléatoire $\xi \geq 0$ est donnée par la distribution exponentielle suivante (annexe 6) :

$$f(\xi) = \frac{1}{15,1} e^{-\frac{\xi}{15,1}}$$

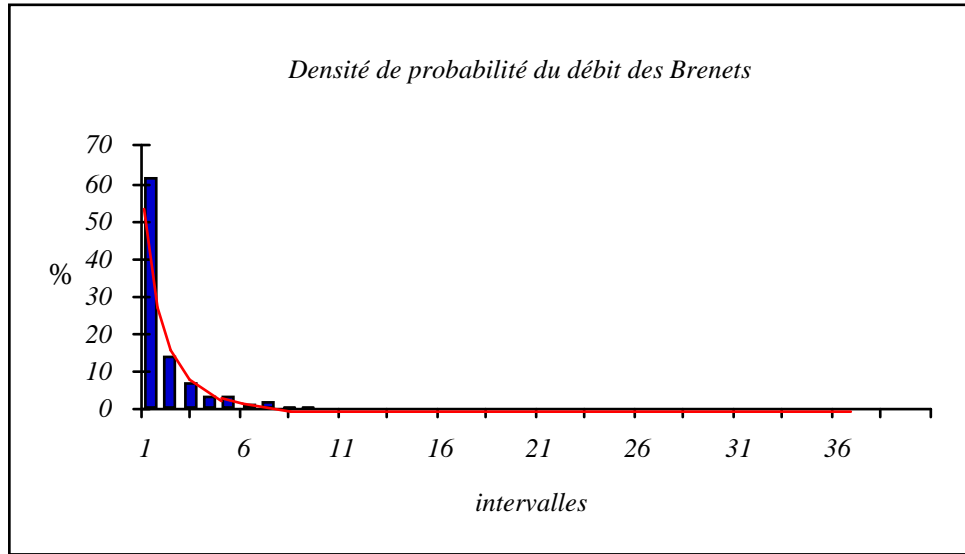


Fig. V.11. Analyse statistique du débit des Brenets.

A partir de (V.16) et (V.17) et en tenant compte du changement de variables introduit dans le paragraphe IV.3, nous obtenons l'expression de ξ en fonction de Δy_1 :

$$\xi = x'_1 - 1 = u'_{1 \max} x_1 - 1$$

donc

$$\xi = \varphi(\Delta y_1) = u'_{1 \max} (\text{Erreur !} + u_1 + \omega_1) - 1$$

En utilisant par la suite la théorie des fonctions de variables aléatoires, nous obtenons la densité de probabilités g de la variation du volume d'eau de la retenue :

$$g(\Delta y_1) = f(\varphi(\Delta y_1)) \frac{d\varphi}{d(\Delta y_1)}$$

ou sous une forme détaillée :

$$g(\Delta y_1) = \frac{u'_{1 \max}}{15,1 \alpha h_1} e^{-\frac{u'_{1 \max} \left(\frac{\Delta y_1}{\alpha h_1} + u_1 + \omega_1 \right) - 1}{15,1}}$$

$$\text{avec } \Delta y_1 \geq \Delta^0 y_1 = \alpha h_1 (\text{Erreur !} - u_1 - \omega_1)$$

Pour obtenir la probabilité que la variation du volume utile soit comprise dans un intervalle $[\Delta^1 y_1, \Delta^2 y_1]$, nous procédons par intégration de la fonction densité de probabilité :

$$\begin{aligned} \text{prob}\{\Delta y_1' [\Delta^1 y_1, \Delta^2 y_1]\} &= \int_{\Delta^1 y_1}^{\Delta^2 y_1} g(\Delta y_1) d(\Delta y_1) = \\ &= e^{-\frac{u'_{1 \max} \left(\frac{\Delta^1 y_1}{\alpha h_1} + u_1 + \omega_1 \right) - 1}{15,1}} - e^{-\frac{u'_{1 \max} \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\alpha h_1} + u_1 + \omega_1 \right) - 1}{15,1}} \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

et par conséquent :

$$\text{prob}\{\Delta y_1' [\Delta^1 y_1, \Delta^2 y_1]\} = e^{-\frac{u'_{1\max} \omega_1 - 1}{15,1}} e^{-\frac{u'_{1\max} u_1}{15,1}} \left[e^{-\frac{u'_{1\max} \Delta^1 y_1}{15,1 \alpha h_1}} - e^{-\frac{u'_{1\max} \Delta^2 y_1}{15,1 \alpha h_1}} \right]$$

qui peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\text{prob}\{\Delta y_1' [\Delta^1 y_1, \Delta^2 y_1]\} = \alpha_1 v_1 \phi_1(\Delta^1 y_1, \Delta^2 y_1), \quad \Delta^1 y_1 > \Delta^0 y_1$$

$$\text{avec la constante } \alpha_1 = e^{-\frac{u'_{1\max} \omega_1 - 1}{15,1}} \text{ et la nouvelle variable de commande } v_1 = e^{-\frac{u'_{1\max} u_1}{15,1}}$$

Dans le cas particulier $\Delta^1 y_1 = \Delta^0 y_1$, nous obtenons :

$$\text{prob}\{\Delta y_1' [\Delta^0 y_1, \Delta^2 y_1]\} = 1 - e^{-\frac{u'_{1\max} \omega_1 - 1}{15,1}} e^{-\frac{u'_{1\max} u_1}{15,1}} e^{-\frac{u'_{1\max} \Delta^2 y_1}{15,1 \alpha h_1}}$$

$$\text{prob}\{\Delta y_1' [\Delta^0 y_1, \Delta^2 y_1]\} = 1 - \alpha_1 v_1 \phi_1^0(\Delta^2 y_1)$$

La discrétisation proposée pour la valeur $y_1' [0,1]$ du stock d'eau du premier barrage consiste en $N_1 = 11$ niveaux équidistants :

$$y_1 = 0 ; 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 0,9 ; 1$$

Nous considérons par la suite les éléments de la forme

$$\text{prob}\{\Delta y_1 = a\} = \text{prob}\{\Delta y_1' [a - 0,05 ; a + 0,05]\} = \int_{a - 0,05}^{a + 0,05} g(\Delta y_1) d(\Delta y_1) \quad (\text{V.19})$$

$$a \in \{-1 ; -0,9 ; \dots ; -0,2 ; -0,1 ; 0 ; 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 0,9 ; 1\}$$

en obtenant ainsi la matrice de transition $\mathbf{T}_{(1)}$ de la chaîne de Markov associée à la gestion de l'eau du barrage de Chatelot. La configuration de cette matrice dépend de la variation de la commande u_1 , de la façon suivante :

$$\dagger_{(1)}(u_1) = \begin{pmatrix} \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx & \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx & \int_{0,15}^{0,25} g(x)dx & \cdots & \int_{0,65}^{0,75} g(x)dx & \int_{0,75}^{0,85} g(x)dx & \int_{0,85}^{0,95} g(x)dx & \int_{0,95}^{1,05} g(x)dx \\ \beta & \chi & \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx & \cdots & \int_{0,55}^{0,65} g(x)dx & \int_{0,65}^{0,75} g(x)dx & \int_{0,75}^{0,85} g(x)dx & \int_{0,85}^{0,95} g(x)dx \\ \zeta & \delta & \chi & \cdots & \int_{0,45}^{0,55} g(x)dx & \int_{0,55}^{0,65} g(x)dx & \int_{0,65}^{0,75} g(x)dx & \int_{0,75}^{0,85} g(x)dx \\ 0 & \zeta & \delta & \cdots & \int_{0,35}^{0,45} g(x)dx & \int_{0,45}^{0,55} g(x)dx & \int_{0,55}^{0,65} g(x)dx & \int_{0,65}^{0,75} g(x)dx \\ 0 & 0 & \zeta & \cdots & \int_{0,25}^{0,35} g(x)dx & \int_{0,35}^{0,45} g(x)dx & \int_{0,45}^{0,55} g(x)dx & \int_{0,55}^{0,65} g(x)dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \zeta & \delta & \chi & \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \zeta & \delta & \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx \end{pmatrix}$$

avec :

$$\beta = \begin{cases} 0, u_1 \in [0; 0,22[\\ \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx, u_1 \in [0,22; 0,63] \end{cases}, \chi = \begin{cases} \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx, u_1 < 0,22 \\ \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx, u_1 \in [0,22; 0,63] \end{cases}, \zeta = \begin{cases} 0, u_1 \in [0; 0,63] \\ \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx, u_1 > 0,63 \end{cases}, \delta = \begin{cases} 0, u_1 \in [0; 0,22[\\ \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx, u_1 \in [0,22; 0,63] \\ \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx, u_1 > 0,63 \end{cases}$$

En étudiant les équations (V.12) de gestion des ressources d'eau, nous remarquons que pour $u_1 > 0,63$, le système ne peut pas être géré sans déversements. Nous allons faire l'étude pour l'intervalle $[0,22; 0,63]$ où la commande u_1 prend des valeurs maximales pour une structure constante de la matrice de transition $\dagger_{(1)}$:

$$\dagger_{(1)}(u_1) = \begin{pmatrix} \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx & \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx & \int_{0,15}^{0,25} g(x)dx & \cdots & \int_{0,85}^{0,95} g(x)dx & \int_{0,95}^{1,05} g(x)dx \\ \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx & \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx & \int_{0,15}^{0,25} g(x)dx & \cdots & \int_{0,75}^{0,85} g(x)dx & \int_{0,85}^{0,95} g(x)dx \\ 0 & \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx & \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx & \cdots & \int_{0,65}^{0,75} g(x)dx & \int_{0,75}^{0,85} g(x)dx \\ 0 & 0 & \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx & \cdots & \int_{0,55}^{0,65} g(x)dx & \int_{0,65}^{0,75} g(x)dx \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \int_{0,45}^{0,55} g(x)dx & \int_{0,55}^{0,65} g(x)dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \int_{-0,05}^{0,05} g(x)dx & \int_{0,05}^{0,15} g(x)dx \end{pmatrix} \text{ pour } u_1 \in [0,22; 0,63]$$

Pour cette structure, nous pouvons écrire la forme linéaire en la commande v_1 de la matrice de transition :

$$\dagger_{(1)}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5416170,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000021 & 0,000009 \\ -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,84632 & 1,304703 & 0,382734 & 0,112275 & 0,032936 & 0,009662 & 0,002834 & 0,000831 & 0,000244 & 0,000071 & 0,000009 \end{pmatrix} v_1$$

Ceci nous donne une forme bilinéaire de l'équation fondamentale de la chaîne de Markov :

$$\mathbf{P}_{(1)}(n+1) = \mathbf{P}_{(1)}(n) \mathbf{\dagger}_{(1)}(v_1)$$

avec la matrice de transition

$$\mathbf{\dagger}_{(1)}(v_1) = \mathbf{\dagger}_{(1)}^0 + \mathbf{\dagger}_{(1)}^1 v_1 \quad \text{où } v_1 = e^{-\frac{u'_1 \max u_1}{15,1}}, v_1 \in [0,1595; 0,5267]$$

et $\mathbf{P}_{(1)}(n) \in \mathbb{R}^{1 \times 11}$ qui contient les probabilités d'apparition de chaque état du système (représenté par un niveau du volume d'eau de la retenue) à l'instant n d'évolution.

b) Etude de l'évolution du volume d'eau de la retenue du barrage du Refrain

L'analyse statistique des apports x'_2 intervenant dans l'équation (V.12)-b de gestion des ressources d'eau du barrage du Refrain :

$$y_2(n+1) - y_2(n) = \alpha h_2 (x_2(n) + k_2(u_1(n) + \omega_1) - u_2(n) - \omega_2) \quad (\text{V.20})$$

donne pour la période de trois ans analysée, les résultats suivants (annexe 6) :

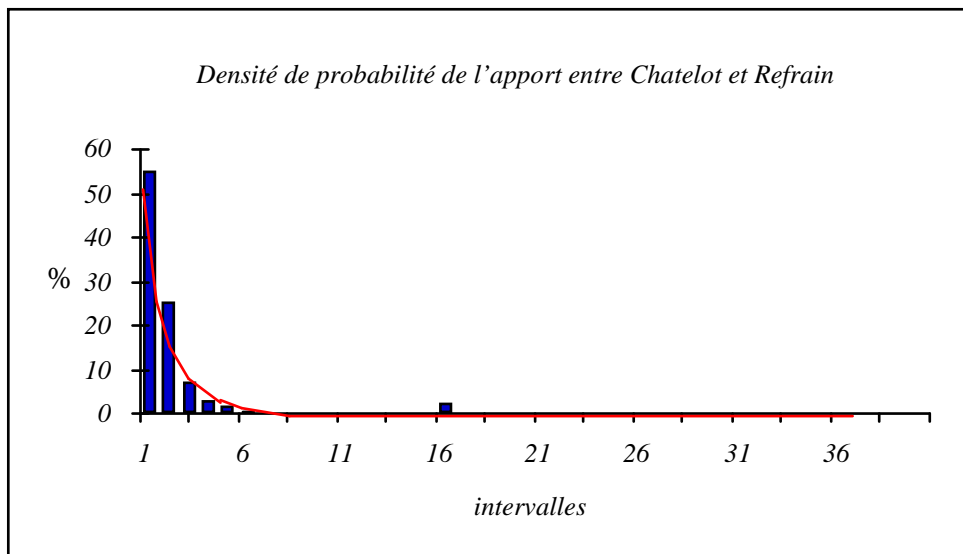


Fig. V.12. Analyse statistique des apports au Refrain.

avec :

- l'apport moyen entre Chatelot et Refrain : $6,46 \text{ m}^3/\text{s}$;
- déviation standard : $11,4 \text{ m}^3/\text{s}$;
- apport maximum = $132 \text{ m}^3/\text{s}$, apport minimum = $0 \text{ m}^3/\text{s}$;

La densité de probabilité de x'_2 est exponentielle et correspond à l'équation :

$$f(x'_2) = \frac{1}{6,46} e^{-\frac{x'_2}{6,46}}, \quad x'_2 \geq 0$$

A partir de (V.20) nous obtenons la densité de probabilité de Δy_2 :

$$g(\Delta y_2) = \frac{u'_{2\max}}{6,46 \alpha h_2} e^{-\frac{u'_{2\max}}{6,46 \alpha h_2} (\Delta y_2 + (u_2 + \omega_2) \alpha h_2 - (u_1 + \omega_1) k_2 \alpha h_2)}$$

$$\text{avec : } \Delta y_2 \geq \Delta^0 y_2 = \alpha h_2 (k_2(u_1 + \omega_1) - u_2 - \omega_2).$$

Pour obtenir la probabilité que la variation du stock soit comprise dans un intervalle $[\Delta^1 y_2, \Delta^2 y_2]$, nous procédons par intégration, comme dans le cas de Chatelot :

$$\text{prob}\{\Delta y_2' [\Delta^1 y_2, \Delta^2 y_2]\} = e^{\frac{u'_{2\max} \omega_1 k_2}{6,46}} e^{\frac{u'_{2\max} (u_1 k_2 - u_2)}{6,46}} \left(e^{-\frac{u'_{2\max} \Delta^1 y_2}{6,46 \alpha h_2}} - e^{-\frac{u'_{2\max} \Delta^2 y_2}{6,46 \alpha h_2}} \right) \quad (\text{V.21})$$

ou sous une forme condensée :

$$\text{prob}\{\Delta y_2' [\Delta^1 y_2, \Delta^2 y_2]\} = \alpha_2 v_2 \phi_2(\Delta^1 y_2, \Delta^2 y_2), \quad \Delta^1 y_2 > \Delta^0 y_2, \quad 1$$

$$\frac{u'_{2\max} \omega_1 k_2}{6,46} \quad \frac{u'_{2\max} (u_1 k_2 - u_2)}{6,46}$$

avec la constante $\alpha_2 = e$ et la nouvelle variable de commande $v_2 = e$.

Dans le cas particulier $\Delta^1 y_2 = \Delta^0 y_2$, nous obtenons :

$$\text{prob}\{\Delta y_2' [\Delta^0 y_2, \Delta^2 y_2]\} = 1 - e^{\frac{u'_{2\max} \omega_1 k_2}{6,46}} e^{\frac{u'_{2\max} (u_1 k_2 - u_2)}{6,46}} e^{-\frac{u'_{2\max} \Delta^2 y_2}{6,46 \alpha h_2}}$$

donc :

$$\text{prob}\{\Delta y_2' [\Delta^0 y_2, \Delta^2 y_2]\} = 1 - \alpha_2 v_2 \phi_2^0(\Delta^2 y_2)$$

Comme dans le cas du barrage de Chatelot, la valeur minimum $\Delta^0 y_2$ de la variation du volume d'eau dépend des commandes u_1 et u_2 appliquées au niveau des centrales adjacentes. Par conséquent, la structure de la matrice de transition $\ddagger_{(2)}$ de la chaîne de Markov associée à la gestion de l'eau du barrage du Refrain dépend elle aussi des deux commandes.

En considérant l'étude d'une structure fixe de la matrice de transition, nous obtenons l'intervalle $u_2' [0,48 ; 1]$ associé au domaine de commande du Chatelot $u_1' [0,22 ; 0,63]$. Dans ce cas, la matrice $\ddagger_{(2)}$ prend la forme suivante :

$$\ddagger_{(2)}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,9731340,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,077054 & 0,05785 & 0,043431 & 0,032606 & 0,02448 & 0,07374 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,077054 & 0,05785 & 0,043431 & 0,032606 & 0,098218 \\ 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,077054 & 0,05785 & 0,043431 & 0,130824 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,077054 & 0,05785 & 0,174255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,077054 & 0,232105 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 & 0,309159 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29619 & 0,323058 & 0,24254 & 0,182091 & 0,136707 & 0,102635 \end{pmatrix} v_2$$

avec la nouvelle variable d'entrée :

$$v_2 = e^{\frac{u'_{2\max}(u_1 k_2 - u_2)}{6,46}}, \quad v_2 \in [0,1272 ; 13,2241].$$

Par conséquent, l'équation fondamentale de la chaîne est bilinéaire :

$$\mathbf{P}_{(2)}(n+1) = \mathbf{P}_{(2)}(n) \mathbf{\ddagger}_{(2)}(v_2), \quad \text{où } \mathbf{\ddagger}_{(2)}(v_2) = \mathbf{\ddagger}_{(2)}^0 + \mathbf{\ddagger}_{(2)}^1 v_2, \quad v_2 \in [0,1272 ; 13,2241].$$

où $\mathbf{P}_{(2)}(n) \in \mathbb{R}^{1 \times 11}$ regroupe les probabilités d'apparition de chaque état du système (représenté par un niveau du volume d'eau du barrage de Refrain) à l'instant n d'évolution et la matrice $\mathbf{\ddagger}_{(1)} \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$ est formée par les probabilités de transition entre ces états.

c) Etude de l'évolution du volume d'eau de la retenue du barrage de Vaufrey

La variation du volume d'eau du barrage de Vaufrey dépend directement de l'apport aléatoire qui alimente ce barrage. La fonction qui définit cette dépendance est donnée par l'équation (V.12)-c de la gestion des ressources d'eau :

$$y_3(n+1) - y_3(n) = \alpha h_3 (x_3(n) + k_3(u_2(n) + \omega_2) - u_3(n)) \quad (\text{V.22})$$

L'analyse statistique de la variable aléatoire x'_3 nous donne la densité de probabilité suivante (annexe 6) :

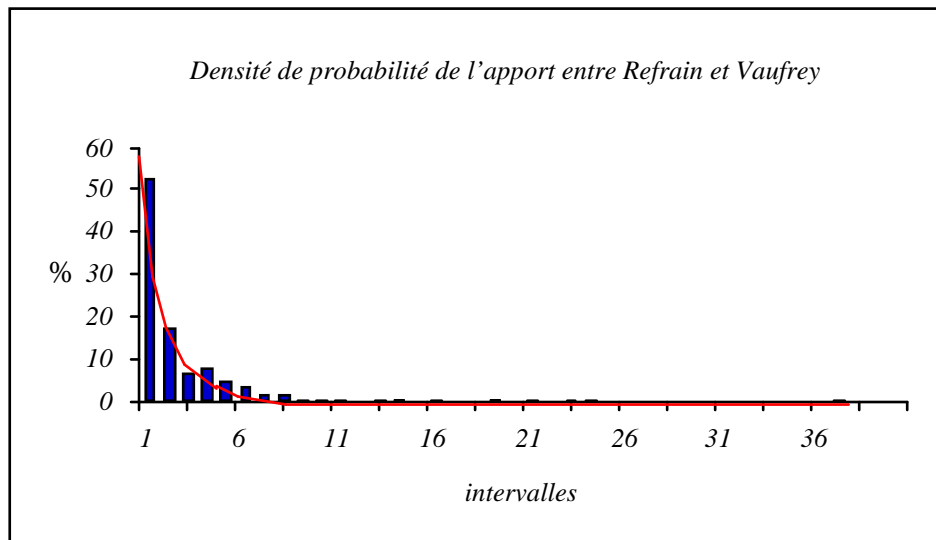


Fig. V.13. Analyse statistique des apports à Vaufrey.

avec les paramètres :

- apport moyen entre Refrain et Vaufrey : $6,9 \text{ m}^3/\text{s}$;
- déviation standard : $10,6 \text{ m}^3/\text{s}$;
- apport maximum = $120 \text{ m}^3/\text{s}$, apport minimum = $0 \text{ m}^3/\text{s}$.

La densité de probabilité de l'apport x'_3 étudié présente une forme exponentielle :

$$f(x'_3) = \frac{1}{6,9} e^{-\frac{x'_3}{6,9}}, \quad x'_3 \geq 0$$

En utilisant l'équation (V.22), la densité de probabilité de Δy_3 s'écrit par la suite :

$$g(\Delta y_3) = \frac{u'_3 \max}{6,9 \alpha h_3} e^{-\frac{u'_3 \max}{6,9 \alpha h_3} (\Delta y_3 + u_3 \alpha h_3 - (u_2 + \omega_2) k_3 \alpha h_3)}$$

$$\text{avec : } \Delta y_3 \geq \Delta^0 y_3 = \alpha h_3 (k_3(u_2 + \omega_2) - u_3).$$

Pour obtenir la probabilité que la variation du stock soit comprise dans un intervalle $[\Delta^1 y_3, \Delta^2 y_3]$, nous procédons par intégration. Nous obtenons ainsi :

$$\text{prob}\{\Delta y_3' [\Delta^1 y_3, \Delta^2 y_3]\} = e^{-\frac{u'_3 \max \omega_2 k_3}{6,9}} e^{-\frac{u'_3 \max}{6,9} (u_2 k_3 - u_3)} \left(e^{-\frac{u'_3 \max \Delta^1 y_3}{6,9 \alpha h_3}} - e^{-\frac{u'_3 \max \Delta^2 y_3}{6,9 \alpha h_3}} \right)$$

donc

$$\text{prob}\{\Delta y_3' [\Delta^1 y_3, \Delta^2 y_3]\} = \alpha_3 v_3 \phi_3(\Delta^1 y_3, \Delta^2 y_3), \quad \Delta^1 y_3 > \Delta^0 y_3,$$

$$\text{avec la constante } \alpha_3 = e^{-\frac{u'_3 \max \omega_2 k_3}{6,9}} \text{ et la variable de commande } v_3 = e^{-\frac{u'_3 \max}{6,9} (u_2 k_3 - u_3)}$$

Dans le cas particulier $\Delta^1 y_3 = \Delta^0 y_3$, nous obtenons :

$$\text{prob}\{\Delta y_3' [\Delta^0 y_3, \Delta^2 y_3]\} = 1 - e^{-\frac{u'_3 \max \omega_2 k_3}{6,9}} e^{-\frac{u'_3 \max}{6,9} (u_2 k_3 - u_3)} e^{-\frac{u'_3 \max \Delta^2 y_3}{6,9 \alpha h_3}}$$

$$\text{et par conséquent : } \text{prob}\{\Delta y_3' [\Delta^0 y_3, \Delta^2 y_3]\} = 1 - \alpha_3 v_3 \phi_3^0(\Delta^2 y_3)$$

En considérant $N_3 = 11$ états du volume d'eau du barrage de Vaufrey, la matrice de transition de la chaîne de Markov prend la forme suivante, valable pour $u_2' [0,48 ; 1]$ et $u_3' [0,18 ; 0,37]$:

$$\dagger_{(3)}(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,914321 & 0,203393 & 0,158148 & 0,122967 & 0,095613 & 0,074344 & 0,057806 & 0,044947 & 0,034948 & 0,027174 & 0,094981 \\ -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,158148 & 0,122967 & 0,095613 & 0,074344 & 0,057806 & 0,044947 & 0,034948 & 0,122151 \\ 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,158148 & 0,122967 & 0,095613 & 0,074344 & 0,057806 & 0,044947 & 0,157099 \\ 0 & 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,158148 & 0,122967 & 0,095613 & 0,074344 & 0,057806 & 0,202046 \\ 0 & 0 & 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,158148 & 0,122967 & 0,095613 & 0,074344 & 0,259852 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,158148 & 0,122967 & 0,095613 & 0,334196 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,158148 & 0,122967 & 0,429809 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,158148 & 0,552776 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,203393 & 0,710924 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,1759 & 0,261583 & 0,914317 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,1759 & 1,1759 \end{pmatrix} v_3$$

avec la variable d'entrée :

$$v_3 = e^{-\frac{u'_3 \max (u_2 k_3 - u_3)}{6,9}}, \quad v_3' [0,116 ; 4,5143]$$

L'équation fondamentale de la chaîne de Markov associée au barrage de Vaufrey prend ainsi la forme bilinéaire suivante :

$$\mathbf{P}_{(3)}(n+1) = \mathbf{P}_{(3)}(n) \dot{\mathbf{P}}_{(3)}(v_3), \text{ où } \dot{\mathbf{P}}_{(3)}(v_3) = \dot{\mathbf{P}}_{(3)}^0 + \dot{\mathbf{P}}_{(3)}^1 v_3,$$

$$\text{avec } v_3 = e^{\frac{u_3' \max}{6,9} (u_2 k_3 - u_3)}, v_3 \in [0,116; 4,5143]$$

Nous avons vu lors de l'étude de la commande du système hydro-énergétique (paragraphe III.2.4) que les contraintes que doit satisfaire une telle gestion sont les suivantes :

- pas de déversement dans le système ;
- les débits réservés sont à leurs valeurs minima;

avec la condition d'optimalité :

- variation minimum du volume d'eau dans les retenues d'une journée à l'autre.

Les deux contraintes ont déjà été introduites dans les équations (V.16), (V.20) et (V.22) qui ont permis d'établir les chaînes de Markov $\dot{\mathbf{P}}_{(1)}(v_1)$, $\dot{\mathbf{P}}_{(2)}(v_2)$ et $\dot{\mathbf{P}}_{(3)}(v_3)$. Le principe de la commande optimale des chaînes de Markov consiste à élaborer une séquence de décisions capables d'assurer un minimum de variation des volumes d'eau dans chaque retenue.

Le problème peut être traité localement (pour chaque barrage) et globalement (pour les trois barrages). Dans un premier temps, nous étudions la commande optimale au niveau local.

V. Commande optimale locale des barrages étudiés

Pour obtenir une variation minimum du niveau d'eau de la retenue de chaque barrage, il est nécessaire d'effectuer un calcul de la commande optimale des modèles markoviens obtenus. La formalisation du critère d'optimalité fait appel à une matrice de coût associée aux variations de niveau dans chaque barrage. Dans les matrices de coût notées par $R_{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), nous retrouvons des éléments de type r_{kj}^i ($k, j = 1, \dots, 11$) calculés de la façon suivante :

- le coût r_{kj}^i du passage entre les niveaux y_i^k et y_i^j du barrage i est proportionnel au module de la variation réelle du volume utile :

$$\Delta y_i' = y_i'^j - y_i'^k = y_{i \max}' (y_i^j - y_i^k)$$

- r_{kj}^i est proportionnel au rendement η_i de la centrale correspondante.

Par conséquent, le coût élémentaire r_{kj}^i présente la forme suivante, valable pour le barrage i :

$$r_{kj}^i = \eta_i \frac{y_{i \max}'}{\alpha} (y_i^j - y_i^k) \quad [\text{MWh}] \quad \text{avec } \alpha = \frac{\Delta t}{10^6} \quad (\text{V.23})$$

Nous obtenons ainsi une évaluation de la valeur énergétique du volume d'eau qui varie dans chaque barrage. La commande optimale se fait en minimisant l'espérance de coût, ce qui correspond à minimiser l'espérance de variation du volume d'eau. Par conséquent, le critère d'optimalité correspondant au barrage i prend la forme suivante :

$$w_{(i)} = \min_{v_i} \left\{ \text{diag} \left[\begin{matrix} \dagger_{(i)}(v_i) \times R_{(i)}^T \end{matrix} \right] + \begin{matrix} \dagger_{(i)}(v_i) \times w_{(i)+1} \end{matrix} \right\} \quad (V.24)$$

avec $\begin{matrix} \dagger_{(i)}(v_i) \end{matrix} \hat{=} \hat{e}^{11 \times 11}$ la matrice de transition de la chaîne de Markov,

$R_{(i)} = [r_{kj}^i] \hat{=} \hat{e}^{11 \times 11}$ la matrice des coûts de variation du niveau d'eau et

$w_{(i)} \hat{=} \hat{e}^{11}$ l'espérance de coût à minimiser.

V.1. Barrage de Chatelot

En utilisant la relation (V.23), nous associons au barrage du Chatelot la matrice des coûts élémentaires $R_{(1)} \hat{=} \hat{e}^{11 \times 11}$ suivante :

$$R_{(1)} = \eta_1 \frac{y'_{1\max}}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \quad (V.25)$$

où $\eta_1 = 17,1072$ [MWh·s/m³] représente le rendement de la centrale du Chatelot,

$y'_{1\max} = 16$ [Mm³] représente le volume utile maximal de la retenue,

$\alpha = 10^{-6} \Delta t$, avec Δt mesuré en [s].

Nous obtenons ainsi :

$$R_{(1)} = 10^3 \begin{pmatrix} 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 & 2,5344 & 2,8512 & 3,1680 \\ 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 & 2,5344 & 2,8512 \\ 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 & 2,5344 \\ 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 \\ 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 \\ 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 \\ 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 \\ 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 \\ 2,5344 & 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 \\ 2,8512 & 2,5344 & 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 \\ 3,1680 & 2,8512 & 2,5344 & 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{MWh}]$$

et par conséquent, l'équation d'optimalité du système peut s'écrire :

$$w_{(1)} = \min_{v_1} \left\{ \text{diag} \left[\begin{matrix} \dagger_{(1)}(v_1) \times R_{(1)}^T \end{matrix} \right] + \begin{matrix} \dagger_{(1)}(v_1) \times w_{(1)+1} \end{matrix} \right\}$$

avec $w_{(1)}$ l'espérance de coût minimum et $v_1 = e^{-\frac{u'_{1\max} u_1}{15,1}}$, $v_1 \in [0,1595 ; 0,5267]$ le

paramètre de commande (où $u_1 \in [0,22 ; 0,63]$ représente la commande réelle du Chatelot).

L'historique de l'évolution de l'espérance de coût w_0 [MWh] est le suivant :

		transitions																				
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$y_1 = 0$	10699	10514	10329	10141	9951	9755	9553	9342	9117	8875	8608	8308	7964	7560	7078	6489	5757	4830	3637	2075	0
	$y_1 = 0,1$	4402	4221	4040	3860	3680	3501	3322	3142	2961	2777	2589	2396	2194	1981	1755	1512	1249	965	658	333	0
	$y_1 = 0,2$	3250	3067	2885	2704	2525	2348	2173	2001	1832	1665	1501	1341	1183	1027	874	722	572	424	278	136	0
é	$y_1 = 0,3$	3254	3068	2883	2698	2515	2333	2152	1975	1800	1628	1460	1297	1139	985	836	691	549	410	273	136	0
t	$y_1 = 0,4$	3373	3186	2998	2810	2623	2436	2249	2064	1880	1699	1520	1346	1176	1012	853	701	554	412	273	136	0
a	$y_1 = 0,5$	3504	3316	3128	2941	2753	2564	2375	2185	1995	1805	1616	1430	1246	1066	892	726	567	417	274	136	0
t	$y_1 = 0,6$	3639	3451	3263	3074	2885	2695	2505	2315	2125	1935	1745	1550	1355	1160	967	779	600	433	278	135	0
s	$y_1 = 0,7$	3783	3594	3406	3216	3026	2836	2646	2455	2264	2072	1876	1680	1485	1289	1094	885	677	476	293	133	0
	$y_1 = 0,8$	3950	3761	3572	3381	3191	3000	2808	2616	2423	2227	2030	1833	1635	1435	1224	1015	806	591	348	125	0
	$y_1 = 0,9$	4237	4047	3857	3666	3474	3282	3089	2895	2698	2500	2302	2101	1897	1685	1472	1257	1030	783	538	312	0
	$y_1 = 1$	5158	4967	4776	4584	4391	4198	4002	3805	3607	3407	3205	2998	2786	2570	2349	2116	1864	1604	1307	839	0

Tab V.2. Evolution de l'espérance de coût associée au barrage de Chatelot,

avec la commande optimale réelle u_1 associée (calculée à partir de v_1 optimal) :

		transitions																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$y_1 = 0$	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,63	0,63
	$y_1 = 0,1$	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
	$y_1 = 0,2$	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
é	$y_1 = 0,3$	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
t	$y_1 = 0,4$	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
a	$y_1 = 0,5$	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
t	$y_1 = 0,6$	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
s	$y_1 = 0,7$	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,22	0,22	0,22	0,22
	$y_1 = 0,8$	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,22	0,22
	$y_1 = 0,9$	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,22
	$y_1 = 1$	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,22	0,22

Tab V.3. Commande optimale du barrage de Chatelot.

Le calcul de la commande optimale donne une politique qui converge rapidement vers les valeurs numériques suivantes :

- Lorsque le barrage se trouve dans l'un des états $y_1 = 0$ jusqu'à 0,4 la commande appliquée sera $u_1 = 0,22$;
- Pour une évolution dans les états $y_1 = 0,5$ à 1, la commande appliquée sera $u_1 = 0,63$.

V.2. Barrage du Refrain

La matrice des coûts élémentaires $R_{(2)} \hat{e}^{11 \times 11}$ associée au barrage du Refrain est la suivante :

$$\mathbf{R}_{(2)} = \eta_2 \frac{y'_{2\max}}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.26})$$

où $\eta_2 = 11,232$ [MWh·s/m³] représente le rendement de la centrale du Refrain,
 $y'_{2\max} = 1,6$ [Mm³] représente le volume utile maximal de la retenue,
 $\alpha = 10^{-6} \Delta t$, avec Δt mesuré en [s],

avec les valeurs numériques (en MWh) :

$$\mathbf{R}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 & 83,2 & 104 & 124,8 & 145,6 & 166,4 & 187,2 & 208 \\ 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 & 83,2 & 104 & 124,8 & 145,6 & 166,4 & 187,2 \\ 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 & 83,2 & 104 & 124,8 & 145,6 & 166,4 \\ 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 & 83,2 & 104 & 124,8 & 145,6 \\ 83,2 & 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 & 83,2 & 104 & 124,8 \\ 104 & 83,2 & 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 & 83,2 & 104 \\ 124,8 & 104 & 83,2 & 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 & 83,2 \\ 145,6 & 124,8 & 104 & 83,2 & 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 \\ 166,4 & 145,6 & 124,8 & 104 & 83,2 & 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 \\ 187,2 & 166,4 & 145,6 & 124,8 & 104 & 83,2 & 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 \\ 208 & 187,2 & 166,4 & 145,6 & 124,8 & 104 & 83,2 & 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation d'optimalité du système devient ainsi :

$$\mathbf{w}^0 = \min_{v_2} \left\{ \text{diag} \left[\begin{matrix} \dagger \\ (2) \end{matrix} (v_2) \times \mathbf{R}_{(2)}^T \right] + \begin{matrix} \dagger \\ (2) \end{matrix} (v_2) \times \mathbf{w}^0 + 1 \right\} \\ \frac{u'_{2\max} (u_1 k_2 - u_2)}{6,46}$$

avec \mathbf{w}^0 l'espérance de coût minimum et $v_2 = e$, $v_2 \in [0,1272 ; 13,2241]$ le paramètre de commande (où $u_1 \in [0,22 ; 0,6]$ et $u_2 \in [0,48 ; 1]$ représentent les commandes réelles du Chatelot et respectivement du Refrain).

Nous obtenons ainsi les espérances de coût \mathbf{w}^0 [MWh] suivantes :

		transitions																				
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$y_2 = 0$	15,76	14,85	13,95	13,04	12,14	11,24	10,34	9,44	8,55	7,66	6,79	5,93	5,09	4,28	3,52	2,81	2,17	1,62	1,14	0,67	0
	$y_2 = 0,1$	15,52	14,61	13,71	12,80	11,90	10,99	10,09	9,19	8,30	7,41	6,53	5,66	4,82	4,00	3,21	2,48	1,81	1,23	0,75	0,35	0
	$y_2 = 0,2$	15,52	14,61	13,71	12,80	11,90	10,99	10,09	9,19	8,30	7,41	6,53	5,67	4,82	4,00	3,21	2,48	1,81	1,23	0,75	0,35	0
é	$y_2 = 0,3$	15,69	14,79	13,88	12,97	12,07	11,16	10,26	9,36	8,46	7,57	6,69	5,82	4,96	4,13	3,33	2,57	1,88	1,26	0,75	0,34	0
t	$y_2 = 0,4$	15,92	15,01	14,11	13,20	12,29	11,39	10,49	9,58	8,69	7,79	6,90	6,02	5,15	4,30	3,48	2,69	1,96	1,31	0,76	0,33	0
a	$y_2 = 0,5$	16,17	15,26	14,35	13,45	12,54	11,63	10,73	9,83	8,92	8,03	7,13	6,24	5,36	4,49	3,65	2,83	2,06	1,36	0,76	0,31	0
t	$y_2 = 0,6$	16,42	15,51	14,61	13,70	12,79	11,89	10,98	10,07	9,17	8,27	7,37	6,47	5,58	4,70	3,84	2,99	2,18	1,43	0,78	0,28	0
s	$y_2 = 0,7$	16,68	15,77	14,86	13,95	13,05	12,14	11,23	10,33	9,42	8,52	7,61	6,71	5,82	4,92	4,04	3,17	2,33	1,52	0,80	0,24	0
	$y_2 = 0,8$	16,93	16,02	15,12	14,21	13,30	12,39	11,49	10,58	9,67	8,77	7,86	6,96	6,05	5,15	4,26	3,37	2,49	1,64	0,85	0,19	0
	$y_2 = 0,9$	17,88	16,97	16,06	15,16	14,25	13,34	12,44	11,53	10,62	9,71	8,81	7,90	6,99	6,09	5,18	4,28	3,38	2,48	1,61	0,82	0

$y_2 = 1$	18,45	17,55	16,64	15,73	14,82	13,92	13,01	12,10	11,20	10,29	9,38	8,47	7,56	6,65	5,74	4,83	3,91	2,99	2,0	1,0	0
																		4	5		

Tab V.4. Evolution de l'espérance de coût associée au barrage du Refrain.

avec la commande optimale v_2 :

		transitions																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$y_2 = 0$	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77
	$y_2 = 0,1$	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77
	$y_2 = 0,2$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
é	$y_2 = 0,3$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
t	$y_2 = 0,4$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
a	$y_2 = 0,5$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
t	$y_2 = 0,6$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
s	$y_2 = 0,7$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
	$y_2 = 0,8$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
	$y_2 = 0,9$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
	$y_2 = 1$	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58

Tab V.5. Commande optimale du barrage de Refrain

Nous remarquons que pour les états $y_2 = 0$ et $0,1$ la commande est $v_2 = 0,771$. Les autres états ont une commande qui converge vers $v_2 = 0,5799$. A partir de ces résultats et en connaissant la commande u_1 associée au Chatelot, nous pouvons déduire la commande réelle u_2 du Refrain :

V.3. Barrage de Vaufrey

La matrice des coûts élémentaires $R_{(3)}' \hat{e}^{11 \times 11}$ associée au barrage de Vaufrey s'écrit :

$$R_{(3)} = \eta_3 \frac{y'_{3\max}}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \quad (V.27)$$

où $\eta_3 = 2,0736$ [MWh·s/m³] représente le rendement de la centrale de Vaufrey

$y'_{3\max} = 1,5$ [Mm³] représente le volume utile maximal de la retenue,

$\alpha = 10^{-6} \Delta t$, avec Δt mesuré en [s].

avec les valeurs numériques (en MWh) :

$$\mathbf{R}_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 & 14,4 & 18 & 21,6 & 25,2 & 28,8 & 32,4 & 36 \\ 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 & 14,4 & 18 & 21,6 & 25,2 & 28,8 & 32,4 \\ 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 & 14,4 & 18 & 21,6 & 25,2 & 28,8 \\ 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 & 14,4 & 18 & 21,6 & 25,2 \\ 14,4 & 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 & 14,4 & 18 & 21,6 \\ 18 & 14,4 & 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 & 14,4 & 18 \\ 21,6 & 18 & 14,4 & 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 & 14,4 \\ 25,2 & 21,6 & 18 & 14,4 & 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 & 10,8 \\ 28,8 & 25,2 & 21,6 & 18 & 14,4 & 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 & 7,2 \\ 32,4 & 28,8 & 25,2 & 21,6 & 18 & 14,4 & 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 & 3,6 \\ 36 & 32,4 & 28,8 & 25,2 & 21,6 & 18 & 14,4 & 10,8 & 7,2 & 3,6 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation d'optimalité du système devient ainsi :

$$\mathbf{w}_0 = \min_{v_3} \left\{ \text{diag} \left[\begin{matrix} \dagger \\ (3) \end{matrix} (v_3) \times \mathbf{R}_{(3)}^T \right] + \begin{matrix} \dagger \\ (3) \end{matrix} (v_3) \times \mathbf{w}_{n+1} \right\}$$

$$\frac{u_3' \max}{6,9} (u_2 k_3 - u_3)$$

avec \mathbf{w}_0 l'espérance de coût minimum et $v_3 = e$, $v_3 \in [0,116 ; 4,5143]$ le paramètre de commande (où $u_2 \in [0,48 ; 1]$ et $u_3 \in [0,18 ; 0,37]$ représentent les commandes réelles du Refrain respectivement Vaufrey).

L'historique de l'évolution des espérances de coût \mathbf{w}_0 [MWh] est représenté dans le tableau suivant :

		transitions																				
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$y_3 = 0$	2,9 9	2,8 2	2,6 5	2,4 8	2,3 5	2,1 5	1,9 8	1,8 1	1,6 5	1,4 8	1,3 1	1,1 5	0,9 9	0,8 3	0,6 8	0,5 4	0,4 1	0,3 0	0,2 1	0,1 2	0
	$y_3 = 0,1$	2,9 5	2,7 9	2,6 2	2,4 5	2,2 8	2,1 1	1,9 4	1,7 8	1,6 1	1,4 4	1,2 8	1,1 1	0,9 5	0,7 9	0,6 4	0,4 9	0,3 6	0,2 4	0,1 5	0,0 7	0
	$y_3 = 0,2$	2,9 5	2,7 9	2,6 2	2,4 5	2,2 8	2,1 1	1,9 4	1,7 8	1,6 1	1,4 4	1,2 8	1,1 1	0,9 5	0,7 9	0,6 4	0,4 9	0,3 6	0,2 4	0,1 5	0,0 7	0
	$y_3 = 0,3$	2,9 8	2,8 1	2,6 4	2,4 7	2,3 1	2,1 4	1,9 7	1,8 0	1,6 3	1,4 7	1,3 0	1,1 4	0,9 7	0,8 1	0,6 6	0,5 1	0,3 7	0,2 5	0,1 5	0,0 7	0
t	$y_3 = 0,4$	3,0 1	2,8 4	2,6 7	2,5 1	2,3 4	2,1 7	2,0 0	1,8 3	1,6 7	1,5 0	1,3 3	1,1 7	1,0 0	0,8 4	0,6 8	0,5 3	0,3 9	0,2 6	0,1 5	0,0 6	0
a	$y_3 = 0,5$	3,0 5	2,8 8	2,7 1	2,5 4	2,3 7	2,2 1	2,0 4	1,8 7	1,7 0	1,5 3	1,3 7	1,2 0	1,0 3	0,8 7	0,7 1	0,5 5	0,4 0	0,2 7	0,1 5	0,0 6	0
t	$y_3 = 0,6$	3,0 8	2,9 1	2,7 5	2,5 8	2,4 1	2,2 4	2,0 7	1,9 0	1,7 4	1,5 7	1,4 0	1,2 3	1,0 7	0,9 0	0,7 4	0,5 8	0,4 2	0,2 8	0,1 5	0,0 5	0
s	$y_3 = 0,7$	3,1 2	2,9 5	2,7 8	2,6 1	2,4 4	2,2 8	2,1 1	1,9 4	1,7 7	1,6 0	1,4 4	1,2 7	1,1 0	0,9 3	0,7 7	0,6 0	0,4 4	0,2 9	0,1 5	0,0 4	0
	$y_3 = 0,8$	3,1 5	2,9 8	2,8 2	2,6 5	2,4 8	2,3 1	2,1 4	1,9 7	1,8 0	1,6 4	1,4 7	1,3 0	1,1 3	0,9 7	0,8 0	0,6 3	0,4 7	0,3 1	0,1 6	0,0 4	0
	$y_3 = 0,9$	3,3 2	3,1 5	2,9 8	2,8 1	2,6 5	2,4 8	2,3 1	2,1 4	1,9 7	1,8 0	1,6 4	1,4 7	1,3 0	1,1 3	0,9 6	0,7 9	0,6 3	0,4 6	0,3 0	0,1 5	0
t	$y_3 = 1$	3,4 1	3,2 4	3,0 7	2,9 0	2,7 3	2,5 7	2,4 0	2,2 3	2,0 6	1,8 9	1,7 2	1,5 5	1,3 9	1,2 2	1,0 5	0,8 8	0,7 1	0,5 4	0,3 7	0,1 9	0

Tab V.6. Evolution de l'espérance de coût associée au barrage de Vaufrey.

avec la commande optimale v_3 associée :

		transitions																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$y_3 = 0$	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
	$y_3 = 0,1$	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
é	$y_3 = 0,2$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
	$y_3 = 0,3$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
t	$y_3 = 0,4$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66

a	$y_3 = 0,5$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
t	$y_3 = 0,6$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
s	$y_3 = 0,7$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
	$y_3 = 0,8$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
	$y_3 = 0,9$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
	$y_3 = 1$	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66

Tab V.7. Commande optimale du barrage de Vaufrey

Nous remarquons que la commande v_3 converge vers la valeur de 0,6616 sauf pour les états $y_3 = 0$ et 0,1 où nous avons $v_3 = 0,8502$. A partir de ces résultats et en connaissant la commande u_2 associée au Refrain, nous pouvons déduire la commande réelle u_3 de Vaufrey :

Les résultats des tableaux V.3, V.5 et V.7 nous permettent de conclure que les commandes réelles u_1 , u_2 et u_3 sont réduites lors des sécheresses ou quand le niveau de l'eau dans le barrage correspondant est très bas.

La commande optimale appliquée au niveau local assure une politique correcte uniquement au niveau de chaque barrage. Elle représente une commande décentralisée du système hydro-énergétique. Vu la différence entre les coefficients énergétiques des centrales, cette politique ne correspond pas à une commande optimale du système hydro-énergétique dans sa globalité. Par conséquent, une commande optimale globale s'avère indispensable pour assurer une gestion correcte de l'ensemble des barrages.

VI. Etude globale du système

Un état du système global est formé par l'ensemble des états des trois barrages considérés : Chatelot, Refrain et Vaufrey. Pour obtenir une chaîne de Markov caractérisant l'ensemble du système, nous utilisons le principe des probabilités composées. En effet, comme les apports x'_1 , x'_2 et x'_3 sont des éléments aléatoires indépendants, les variations des stocks d'eau dans les trois retenues étudiées constituent elles aussi des variables aléatoires indépendantes les unes des autres. Cette remarque nous permet de considérer que les probabilités de transition entre les états du système global représentent des produits de probabilités de transition élémentaires (voir (V.15) et les figures V.9 et V10).

Les chaînes de Markov élémentaires obtenues pour la gestion des ressources d'eau des trois barrages étudiés comportent chacune 11 états. La chaîne de Markov globale correspondant à la gestion des ressources d'eau de tout le système aura $11 \times 11 \times 11 = 1331$ états. Le traitement numérique d'un tel système devient pratiquement impossible à l'aide de moyens de calcul conventionnels.

Pour pouvoir réduire l'ordre du modèle global, nous proposons une réduction préalable de chaque chaîne de Markov élémentaire. Dans ce but, l'analyse de chaque barrage doit conserver uniquement les états les plus probables dans l'évolution à long terme. Une étude de l'échelle de pondération de ces systèmes devient ainsi très intéressante.

VI.1. Réduction des chaînes de Markov élémentaires selon la double échelle de pondération

Pour étudier l'échelle de pondération des chaînes de Markov à commande qui modélisent l'évolution des niveaux d'eau des barrages du Chatelot, Refrain et Vaufrey, nous appliquons les résultats du chapitre IV, paragraphe IV.

VI.1.1. Etude de la chaîne de Markov correspondant au barrage du Chatelot

Suite à l'analyse des pondérations de la chaîne de Markov qui modélise la gestion du barrage de Chatelot, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- dans le cas u_1 à $[0,22 ; 0,27]$ la partie forte contient 4 états : $y_1 = 1 ; 0,9 ; 0,8$ et $y_1 = 0,7$. Par conséquent, il y a de fortes probabilités que le barrage soit plein.
- pour la commande u_1 à $[0,27 ; 0,43]$, le système présente 7 états forts. On retrouve ainsi les états $y_1 = 0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3$ et aussi $y_1 = 1 ; 0,9 ; 0,8$ et $0,7$. Le comportement du barrage est caractérisé par des états à forte probabilité d'apparition correspondant aux valeurs extrêmes du stock d'eau.
- dans l'intervalle restant u_1 à $[0,43 ; 0,63]$, les états forts sont en nombre de 4 : $y_1 = 0 ; 0,1 ; 0,2$ et $0,3$. Le stock d'eau de la retenue a de fortes probabilités d'être à sa valeur minimum.

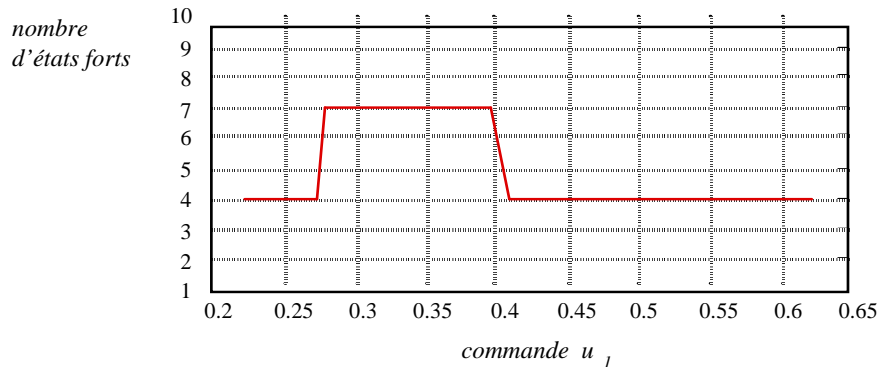


Fig. V.14. Dimension de la partie forte.

Nous concluons que la chaîne de Markov correspondant au barrage de Chatelot ne présente pas la propriété de double échelle de pondération sur tout l'intervalle étudié $[0,22 ; 0,63]$. Dans l'étude du système global, nous prenons en compte l'ensemble des états de la retenue de Chatelot.

Ce résultat est dû au débit entrant x'_1 et au volume utile maximum $y'_{1\max}$ très grands. En effet, le débit des Brenets est supérieur à $1 \text{ m}^3/\text{s}$, tandis que le volume utile du barrage de Chatelot est dix fois supérieur à tous les autres barrages ($y'_{1\max} = 16 \text{ Mm}^3$). Dans ces conditions, tous les niveaux de la retenue sont importants pour notre étude.

VI.1.2. Réduction de la chaîne de Markov correspondant au barrage du Refrain

La chaîne de Markov qui modélise la gestion du barrage de Refrain présente la propriété de double échelle de pondération dans tout l'intervalle de commande : u_1 à $[0,22 ; 0,63]$, u_2 à $[0,48 ; 1]$. La partie forte contient 4 états : $y_2 = 0 ; 0,1 ; 0,2$ et $y_2 = 0,3$. Le stock d'eau de la

retenue a de fortes probabilités d'avoir un niveau réduit. Le coefficient de séparation des pondérations prend des valeurs situées entre 0,05 et 0,2. Son évolution est représentée par la figure suivante :

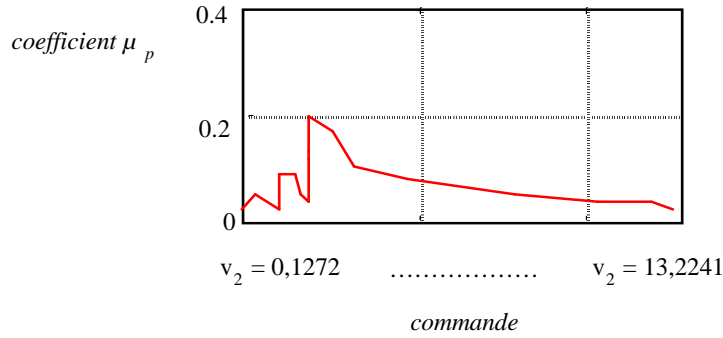


Fig. V.15. Evolution du coefficient de découplage des pondérations.

En appliquant le découplage en régime permanent (chapitre IV, paragraphe IV.2), nous obtenons une matrice stochastique correspondant à la partie forte. Après la bilinéarisation du système, nous avons une matrice de transition de la forme suivante :

$$\dagger_{s(2)}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.9731 & 0.2425 & 0.1821 & 0.5485 \\ -1.2962 & 0.3231 & 0.2425 & 0.7306 \\ 0 & -1.2962 & 0.3231 & 0.9731 \\ 0 & 0 & -1.2962 & 1.2962 \end{pmatrix} v_2 \quad (V.28)$$

où les états forts sont respectivement $y_2 = 0$, $y_2 = 0,1$, $y_2 = 0,2$ et $y_2 = 0,3$.

L'existence de la double échelle de pondération du modèle s'explique par les commandes u_2 proches du maximum qui donnent une consommation rapide de la réserve d'eau ($y'_{2\max} = 1,6 \text{ Mm}^3$) du barrage de Refrain.

VI.1.3. Réduction de la chaîne de Markov correspondant au barrage de Vaufrey

En analysant la chaîne de Markov qui modélise la gestion du barrage de Vaufrey, nous concluons que la propriété de double échelle de pondération existe dans tout l'intervalle de commande : u_2 á $[0,48 ; 1]$, u_3 á $[0,18 ; 0,37]$. La partie forte contient 3 états : $y_2 = 0$, $0,1$ et $0,2$. Le stock d'eau de la retenue a de fortes probabilités d'avoir un niveau réduit. Le coefficient de séparation des pondérations prend des valeurs comprises entre 0,01 et 0,03. Son évolution en fonction de la commande est représentée dans la figure suivante :

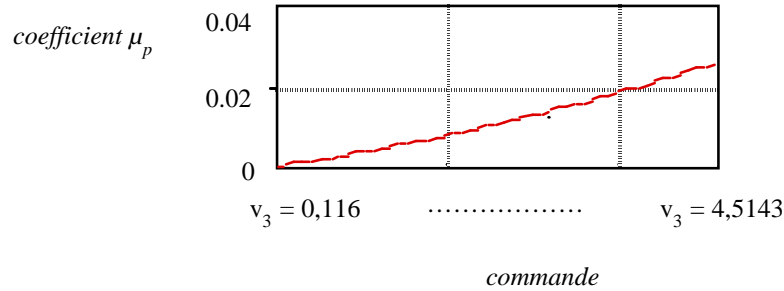


Fig. V.16. Evolution du coefficient de découplage des pondérations.

La matrice de transition de la partie forte est formée respectivement par les états $y_3 = 0$, $y_3 = 0.1$, et $y_3 = 0.2$ et prend la forme suivante (voir chapitre IV, paragraphe IV.2) :

$$\dagger_{s(3)}(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.9143 & 0.2034 & 0.7109 \\ -1.1759 & 0.2616 & 0.9143 \\ 0 & -1.1759 & 1.1759 \end{pmatrix} v_3 \quad (V.29)$$

La double échelle de pondération du modèle est la conséquence d'une consommation rapide de la petite réserve d'eau ($y'_{3_{\max}} = 1,5 \text{ Mm}^3$) du barrage de Vaufrey.

La réduction des chaînes de Markov de chaque barrage selon la double échelle de pondération permet une réduction significative de la chaîne de Markov globale, qui dans notre cas aura $11 \times 4 \times 3 = 132$ états. Cette réduction prend en compte les états les plus importants de chaque barrage et par conséquent la gestion proposée garde l'essentiel du processus réel de gestion des ressources d'eau.

VI.2. Chaîne de Markov correspondant au processus global de gestion de l'eau

La chaîne de Markov qui modélise la gestion des ressources d'eau du système hydro-énergétique étudié est obtenue en effectuant des produits de Kronecker des matrices de transition $\dagger_{s(1)}$, $\dagger_{s(2)}$ et $\dagger_{s(3)}$. Elle présente la forme suivante :

$$\dagger(v_1, v_2, v_3) = \dagger_{s(1)}(v_1) \wedge \dagger_{s(2)}(v_2) \wedge \dagger_{s(3)}(v_3)$$

ou sous une forme détaillée :

$$\dagger(v_1, v_2, v_3) = \dagger_0 + \dagger_1 v_1 + \dagger_2 v_2 + \dagger_3 v_3 + \dagger_4 v_1 v_2 + \dagger_5 v_1 v_3 + \dagger_6 v_2 v_3 + \dagger_7 v_1 v_2 v_3 \quad (V.30)$$

avec $v_1 \in [0, 1595 ; 0, 5267]$ commande correspondant à Chatelot, $v_2 \in [0, 1272 ; 13, 2241]$ à Refrain et $v_3 \in [0, 116 ; 4, 5143]$ à Vaufrey. La dimension de la matrice \dagger est de 132×132 .

En notant par :

$$\dagger_{s(1)}(v_1) = \dagger_{0(1)} + \dagger_{1(1)} v_1, \quad \dagger_{s(2)}(v_2) = \dagger_{0(2)} + \dagger_{1(2)} v_2, \quad \dagger_{s(3)}(v_3) = \dagger_{0(3)} + \dagger_{1(3)} v_3$$

les matrices \dagger_i de dimension 132×132 sont obtenues en effectuant les produits de Kronecker suivants :

$$\begin{aligned} \dagger_0 &= \dagger_{0(1)} \wedge \dagger_{0(2)} \wedge \dagger_{0(3)}, & \dagger_1 &= \dagger_{1(1)} \wedge \dagger_{0(2)} \wedge \dagger_{0(3)} \\ \dagger_2 &= \dagger_{0(1)} \wedge \dagger_{1(2)} \wedge \dagger_{0(3)}, & \dagger_3 &= \dagger_{0(1)} \wedge \dagger_{0(2)} \wedge \dagger_{1(3)} \\ \dagger_4 &= \dagger_{1(1)} \wedge \dagger_{1(2)} \wedge \dagger_{0(3)}, & \dagger_5 &= \dagger_{1(1)} \wedge \dagger_{0(2)} \wedge \dagger_{1(3)} \\ \dagger_6 &= \dagger_{0(1)} \wedge \dagger_{1(2)} \wedge \dagger_{1(3)}, & \dagger_7 &= \dagger_{1(1)} \wedge \dagger_{1(2)} \wedge \dagger_{1(3)}. \end{aligned}$$

Vu la dimension encore importante de la chaîne de Markov globale (V.30), nous pouvons simplifier le calcul de la commande optimale en utilisant la méthode des perturbations singulières.

VI.3. Simplification du système à l'aide des perturbations singulières

Dans le modèle réduit, nous retrouvons des situations dans lesquelles une des retenues en aval du Chatelot est arrivée à sa valeur limite ($y_2 = 0$ pour le Refrain respectivement $y_3 = 0$ pour Vaufrey). Ces situations extrêmes (figure V.17) sont plus difficiles à gérer et l'évolution de leur probabilité d'apparition présente un régime transitoire important. Elles constituent la partie lente du modèle. La commande optimale des états correspondant exige la mise en place d'une politique de commande plus élaborée.

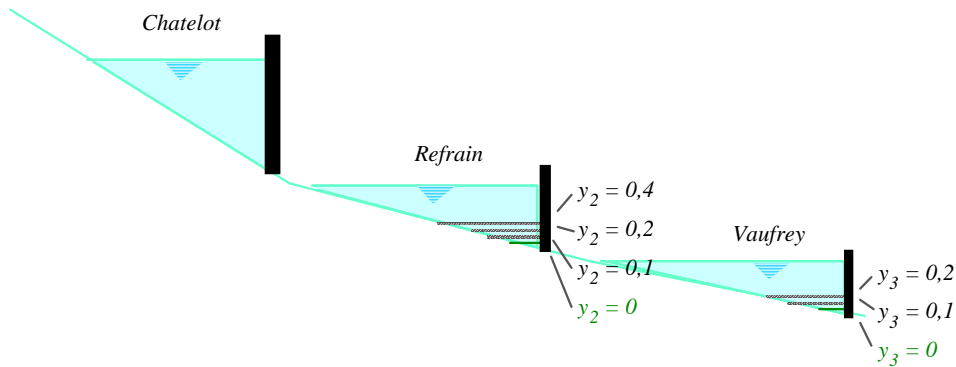


Fig.V.17. Niveaux des retenues caractérisant la partie lente du système.

Les états rapides du système (figure V.18) seront caractérisés par des volumes utiles non nuls dans les retenues de Vaufrey et Refrain ($y_3 = 0,1 ; 0,2$ respectivement $y_2 = 0,1 ; 0,2$ et $0,3$). Ces états ont une probabilité d'apparition quasi-stationnaire (le régime permanent intervient après un régime transitoire très court). La commande de cette partie du système va converger rapidement.

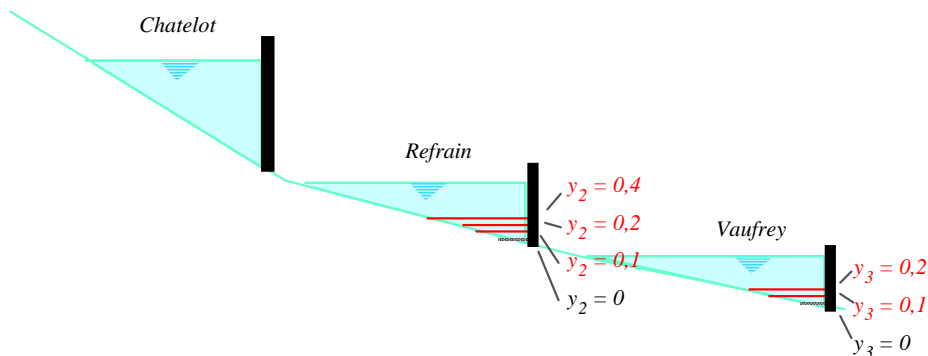


Fig.V.18. Niveaux des retenues caractérisant la partie rapide du système.

Pour mettre en évidence les différentes dynamiques du système, nous utilisons la méthode locale (chapitre IV, paragraphe III.6.2). La partie lente contient 66 états, de même que la partie rapide. Cette échelle de temps est valable sur tout l'intervalle de commande considéré. Les états lents et rapides sont mis en évidence par le tracé des disques de Gershgorine calibrés :

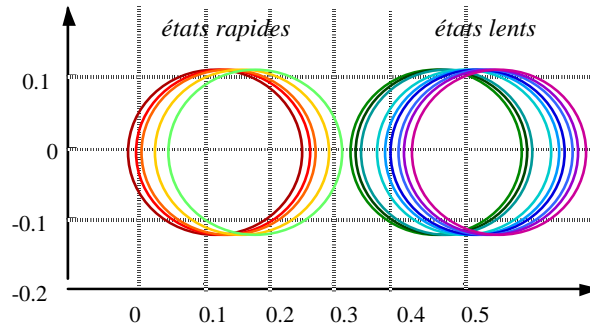


Fig.V.19. Méthode des disques de Gershgorine pour la mise en évidence des dynamiques.

Le coefficient de découplage des dynamiques varie entre 0,001 et 0,11 :

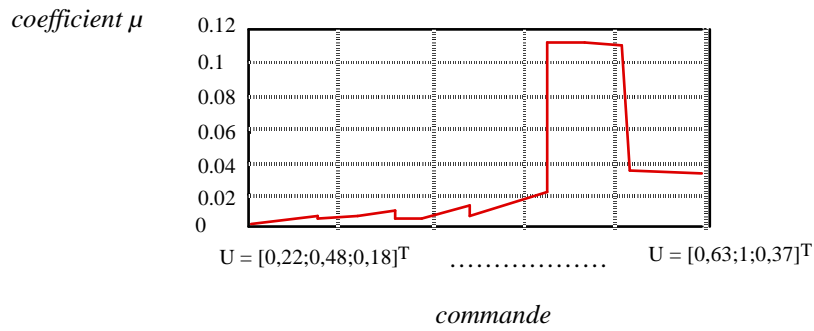


Fig.V.20. Evolution du coefficient de découplage en fonction de la commande.

En numérotant de 1 à 132 les états de la chaîne de Markov globale obtenue par combinaisons des états des chaînes élémentaires réduites (figures V.8, V.9), la permutation nécessaire pour partitionner le système est la suivante :

{ 121 1 109 97 85 73 61 49 37 25 13 130 10 118 106 94 82 70 58 46 34 22 127 124 7 115 103 91 79
67 55 43 31 19 4 112 100 88 76 64 52 40 28 16 123 122 3 2 111 110 99 98 87 86 75 74 63 62 51 50 39 38
27 26 15 14 132 131 12 11 120 119 108 107 96 95 84 83 72 71 60 59 48 47 36 35 24 23 129 128 126 125 9
8 117 116 105 104 93 92 81 80 69 68 57 56 45 44 33 32 21 20 6 5 114 113 102 101 90 89 78 77 66 65 54
53 42 41 30 29 18 17 }

avec les états rapides soulignés (respectivement en rouge sur la figure V.21).

La partie lente du modèle contient les situations extrêmes données par les niveaux limites des retenues de Refrain ou de Vaufrey ($y_2 = 0$ respectivement $y_3 = 0$). En utilisant les techniques de perturbations singulières spécifiques aux chaînes de Markov de type bilinéaire, nous obtenons une partie lente exprimée par la matrice de transition stochastique suivante :

$$\dagger l(v_1, v_2, v_3) = \dagger l_0 + \dagger l_1 v_1 + \dagger l_2 v_2 + \dagger l_3 v_3 + \dagger l_4 v_1 v_2 + \dagger l_5 v_1 v_3 + \dagger l_6 v_2 v_3 + \dagger l_7 v_1 v_2 v_3$$

avec les matrices $\dagger l_i$ obtenues par bilinéarisation du système lent, et une partie rapide exprimée par la matrice de transition :

$$\begin{aligned} \dagger r(v_1, v_2, v_3) = \dagger r_{22}(v_1, v_2, v_3) = & \dagger r_{220} + \dagger r_{221} v_1 + \dagger r_{222} v_2 + \dagger r_{223} v_3 + \dagger r_{224} v_1 v_2 + \dagger r_{225} v_1 v_3 + \\ & + \dagger r_{226} v_2 v_3 + \dagger r_{227} v_1 v_2 v_3 \end{aligned}$$

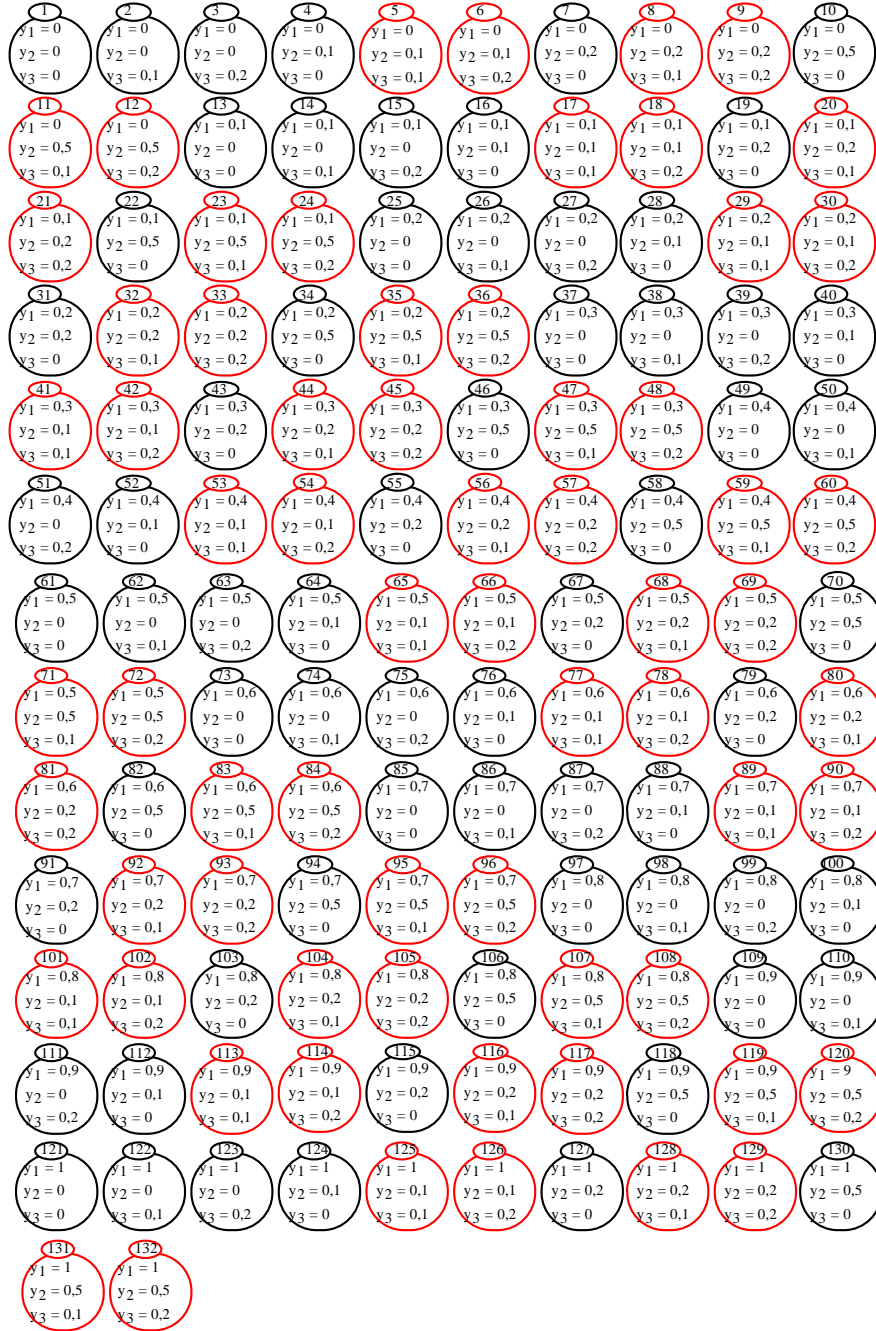


Fig. V.21. Chaîne de Markov globale. Mise en évidence des états rapides (en rouge).

L'application des perturbations singulières sur la chaîne de Markov qui modélise la gestion des ressources d'eau du système, nous permet de simplifier le calcul de la commande optimale. En effet, la dimension des sous-systèmes traités est de 66 états, et par conséquent la simulation devient possible même en utilisant des moyens de calcul relativement modestes.

VI.4. Commande quasi-optimale du système global

Le principe de la commande optimale dans le processus de gestion de l'eau consiste à

élaborer une politique de commande capable d'assurer un minimum de variation des volumes d'eau dans les trois retenues prises en compte.

La formalisation du problème fait appel à une matrice de coût associée à chaque barrage. Chaque matrice de revenus prend en compte le rendement η de la centrale et la variation du volume d'eau. Nous obtenons ainsi une quantification de la valeur de la variation du volume d'eau au niveau de chaque barrage :

- barrage de Chatelot (rendement $\eta_1 = 17,1072 \text{ MWh}\cdot\text{s}/\text{m}^3$) : en considérant les états de la chaîne de Markov $\mathcal{T}_{(1)}$, nous obtenons la matrice de coût $\mathbf{R}_{(1)} \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$ donnée par la relation (V.25) :

$$\mathbf{R}_{(1)} = 10^3 \begin{pmatrix} 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 & 2,5344 & 2,8512 & 3,1680 \\ 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 & 2,5344 & 2,8512 \\ 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 & 2,5344 \\ 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 & 2,2176 \\ 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 & 1,9008 \\ 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 & 1,5840 \\ 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 & 1,2672 \\ 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 & 0,9504 \\ 2,5344 & 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 & 0,6336 \\ 2,8512 & 2,5344 & 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 & 0,3168 \\ 3,1680 & 2,8512 & 2,5344 & 2,2176 & 1,9008 & 1,5840 & 1,2672 & 0,9504 & 0,6336 & 0,3168 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.31})$$

- barrage du Refrain (rendement $\eta_2 = 11,232 \text{ MWh}\cdot\text{s}/\text{m}^3$) : en association avec les états de la partie forte (V.28) de la chaîne de Markov, nous obtenons la matrice $\mathbf{R}_{s(2)} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ suivante :

$$\mathbf{R}_{s(2)} = \eta_2 \frac{y'_{2\max}}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20,8 & 41,6 & 62,4 \\ 20,8 & 0 & 20,8 & 41,6 \\ 41,6 & 20,8 & 0 & 20,8 \\ 62,4 & 41,6 & 20,8 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.32})$$

- barrage de Chatelot (rendement $\eta_3 = 2,0736 \text{ MWh}\cdot\text{s}/\text{m}^3$) : la matrice de coût $\mathbf{R}_{s(3)} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ qui correspond à la partie forte (V.29) de la chaîne de Markov, est la suivante :

$$\mathbf{R}_{s(3)} = \eta_3 \frac{y'_{3\max}}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3,6 & 7,2 \\ 3,6 & 0 & 3,6 \\ 7,2 & 3,6 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.33})$$

Le coût de la transition entre deux états du système global est égal à la somme des coûts élémentaires correspondant au changement d'état de chaque barrage. En prenant en compte les matrices de coût (V.31), (V.32) et (V.33), nous obtenons la matrice globale des coûts de variation des volumes d'eau de la retenue des barrages, correspondant au processus de gestion du système hydro-énergétique :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(1)} \sim \mathbf{R}_{s(2)} \sim \mathbf{R}_{s(3)} \in \mathbb{R}^{132 \times 132}$$

avec l'opérateur \sim défini par :

$$\begin{aligned} &\text{À } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}, \mathbf{B} = [b_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}, \\ &\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mn \times mn} \text{ tel que} \end{aligned}$$

$$A \sim B = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B & a_{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B & \dots & a_{1n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B \\ a_{21} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B & a_{22} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B & \dots & a_{2n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B & a_{n2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B & \dots & a_{nn} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + B \end{bmatrix}$$

L'équation d'optimalité du système dans sa globalité prend la forme suivante (problème terminal à horizon fini fixé) :

$$\mathbf{w}(n) = \min_{v_1, v_2, v_3} \left\{ \text{diag} \left[\begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} (v_1, v_2, v_3) \times \mathbf{R}^T \right] + \begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} (v_1, v_2, v_3) \times \mathbf{w}(n+1) \right\} \quad (\text{V.34})$$

avec le vecteur d'espérances de coût final :

$$\mathbf{w}(N) = \begin{bmatrix} w_1(N) \\ w_2(N) \\ \dots \\ w_{132}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.35})$$

En considérant un horizon de 20 jours ($N = 20$), nous obtenons les commandes optimales présentées dans l'annexe 7 (la numérotation des états correspond à la figure V.21)

Dans le cas où la dimension du système pose des problèmes de calcul, la simplification du problème revient à calculer une commande quasi-optimale du système en calculant la commande optimale des sous-systèmes lent et rapide séparément. Dans ce sens, l'équation d'optimalité du système lent s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}_l(n) = \min_{v_1, v_2, v_3} \left\{ \text{diag} \left[\begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} (v_1, v_2, v_3) \times \mathbf{R}_l^T \right] + \begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} (v_1, v_2, v_3) \times \mathbf{x}_l(n+1) \right\} \quad (\text{V.36})$$

où :

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{R}_{11} \text{ } ^{66 \times 66} \text{ avec la partition } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}.$$

La réinjection de l'espérance mathématique du système lent dans le système initial permet le calcul de la commande optimale de la partie rapide :

$$\mathbf{z}(n) = \min_{v_1, v_2, v_3} \left\{ \text{diag} \left[\begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} (v_1, v_2, v_3) \times \mathbf{R}_{21}^T + \begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} (v_1, v_2, v_3) \times \mathbf{R}_{22}^T \right] + \begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} (v_1, v_2, v_3) \times \mathbf{x}_l(n+1) + \begin{matrix} \dagger \\ \dagger \\ \dagger \end{matrix} \mathbf{z}(n+1) \right\} \quad (\text{V.37})$$

La commande optimale des parties lente et rapide est présentée dans l'annexe 8. Nous remarquons que la commande quasi-optimale ainsi obtenue représente une très bonne approximation de la commande optimale du système initial.

En règle générale, la commande de la partie lente est très importante. Cette partie représente les situations critiques, correspondant aux volumes réduits des retenues :

- au niveau de la centrale du Chatelot nous avons ainsi obtenu une commande u_1 minimum (0,22) pour $y_1 = 0$, et une commande plus grande (0,23 et 0,24) dans le cas $y_2 = 0$ ou $y_3 = 0$. Ceci s'explique par la nécessité de combler le besoin d'eau des retenues suivantes ;
- la commande de la centrale du Refrain est assez importante dans toutes les situations limites (nécessité de refaire les réserves de Vaufrey), sauf pour le cas $y_2 = 0$ quand le volume réduit de la retenue ne le permet pas ;
- dans le cas de Vaufrey, la commande optimale est minimale ($u_3 = 0,18$) pour les états lents. En effet, la gestion des cas extrêmes passe par une économie des débits turbinés, permettant aux retenues situées en amont de refaire leur stock.

Pour appliquer les résultats ainsi obtenus, nous procédons selon l'algorithme suivant, en partant des niveaux connus $y_1(n)$, $y_2(n)$ et $y_3(n)$ des retenues du Chatelot, Refrain et respectivement Vaufrey :

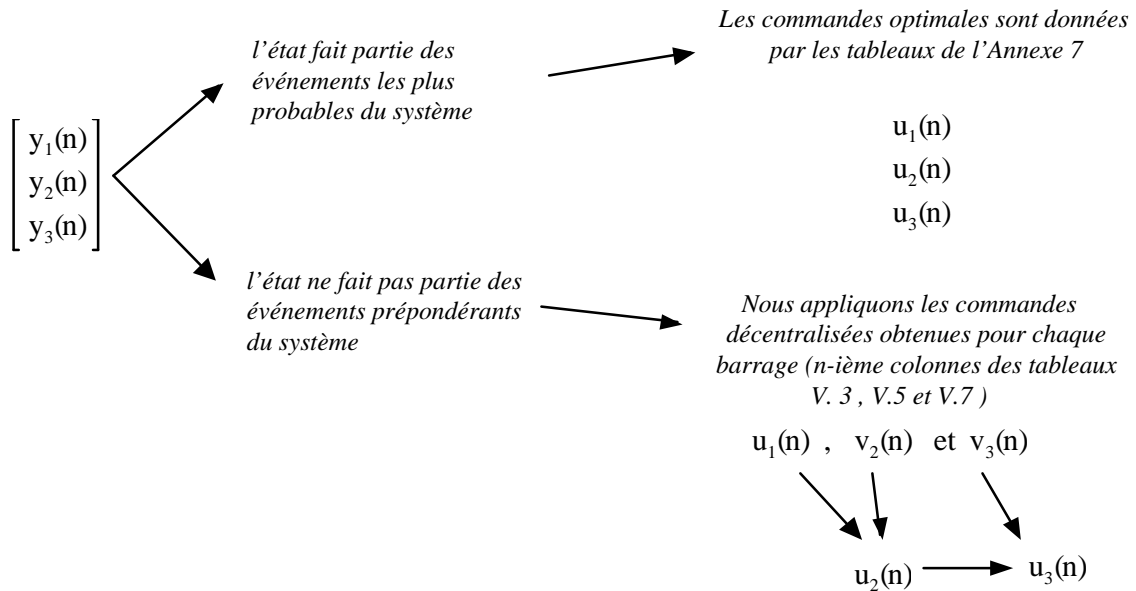


Fig.V.22. Méthodologie de gestion du système hydro-énergétique en utilisant la politique optimale calculée.

Nous obtenons ainsi les équations suivantes :

$$\begin{cases}
 y_1(n+1) - y_1(n) = \alpha h_1 (x_{1\text{réel}} - u_1(n) - \omega_1) \\
 y_2(n+1) - y_2(n) = \alpha h_2 (x_{2\text{réel}} + k_2 (u_1(n) + \omega_1) - u_2(n) - \omega_2) \\
 y_3(n+1) - y_3(n) = \alpha h_3 (x_{3\text{réel}}(n) + k_3 (u_2(n) + \omega_2) - u_3(n)) \\
 u_4(n) = \xi \left\{ \mathbf{W}_{\text{réel}}(n) - \left[\frac{1}{2} \eta_1 u'_{1\text{max}} u_1(n) + \eta_2 u'_{2\text{max}} u_2(n) + \right. \right. \\
 \quad \left. \left. + (\eta_3 u'_{3\text{max}} + \eta_5 u'_{5\text{max}} k_5 k_4 + \eta_6 u'_{6\text{max}} k_6 k_5 k_4 + \eta_7 u'_{7\text{max}} k_7 k_6 k_5 k_4) u_3(n) + \right. \right. \\
 \quad \left. \left. + \eta_7 u'_{7\text{max}} x_{7\text{réel}} \right] \right\} \\
 u_5(n) = -\xi k_5 \left\{ \mathbf{W}_{\text{réel}}(n) - \left[\frac{1}{2} \eta_1 u'_{1\text{max}} u_1(n) + \eta_2 u'_{2\text{max}} u_2(n) + \right. \right. \\
 \quad \left. \left. + (\eta_3 u'_{3\text{max}} + \eta_4 u'_{4\text{max}} k_4 + \eta_6 u'_{6\text{max}} k_6 k_5 k_4 + \eta_7 u'_{7\text{max}} k_7 k_6 k_5 k_4) u_3(n) + \right. \right. \\
 \quad \left. \left. + \eta_7 u'_{7\text{max}} x_{7\text{réel}} \right] \right\} \\
 u_6(n) = k_6 k_5 k_4 u_3(n) \\
 u_7(n) = k_7 k_6 k_5 k_4 u_3(n) + x_{7\text{réel}}(n)
 \end{cases} \quad (\text{V.38})$$

avec $\xi = \frac{1}{k_5 \eta_5 u'_{5\text{max}} - \eta_4 u'_{4\text{max}}}$

Le système (V.38) permet le calcul des commandes correspondant à la gestion des ressources d'eau des centrales de Grosbois (u_4), Liebvillers (u_5), Dampjoux (u_6) et La Prétière (u_7), ainsi que les nouvelles valeurs des niveaux des retenues de Chatelot ($y_1(n+1)$), Refrain ($y_2(n+1)$) et Vaufrey ($y_3(n+1)$). A partir de ces valeurs, l'algorithme s'applique sur le nouvel état de la chaîne de Markov :

$$\begin{bmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \\ y_3(n+1) \end{bmatrix}$$

Dans les tableaux V.3, V.5, V.7, V.8 et V.9, nous avons présenté les commandes optimales calculées pour une période de 20 jours. Ce calcul peut être fait pour un horizon d'un an ou plus, selon l'intérêt de l'utilisateur.

Nous remarquons que la résolution d'un tel problème de commande constitue un compromis entre la précision exigée et le volume de calcul nécessaire. Dans ce sens, plus l'échantillonnage du volume utile d'eau dans les barrages est fin, plus l'étude sera précise mais aussi la taille du modèle global sera grande.

VII. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la commande optimale d'un système hydro-énergétique situé sur le cours du Doubs, en prenant en compte la gestion des ressources d'eau.

Les contraintes introduites sont les suivantes :

- pas de déversements d'eau dans les retenues,
- débits réservés minima,

et la condition de commande optimale est représentée par la minimisation des variations du volume d'eau des retenues, d'une journée à l'autre.

Pour obtenir ces résultats, nous avons effectué une analyse statistique des apports d'eau, en obtenant ainsi des chaînes de Markov qui modélisent l'évolution des volumes d'eau de chaque barrage. Les chaînes de Markov locales génèrent un modèle markovien global de très grande taille. La réduction de ce modèle se fait par application des techniques de découplage en régime permanent sur les chaînes de Markov associées à chaque barrage. Le modèle global réduit est ainsi formé uniquement par les états forts du système, et par conséquent le calcul de la commande optimale devient possible. Une simplification de ce calcul est proposée en utilisant les perturbations singulières.

Dans notre démarche, l'application des méthodes de simplification introduit des erreurs. La qualité des approximations obtenues est donnée par les coefficients de découplage μ_p (découplage en régime permanent) respectivement μ (perturbations singulières). L'approximation est d'autant plus précise que ces coefficients sont proches de zéro. Dans notre cas, l'erreur la plus importante est obtenue lors de la réduction du modèle associé au barrage du Refrain $\mu_p \in [0,05 ; 0,2]$ (figure V.15). Ce coefficient est plus important que celui obtenu pour la réduction du modèle de Vaufrey $\mu_p \in [0,01 ; 0,03]$ (figure V.16). De même, l'application des perturbations singulières donne des résultats précis $\mu \in [0,01 ; 0,11]$ (figure V.20).

Les performances des simplifications proposées sont remarquables. Nous pouvons réduire un système initialement de 1331 états à un système ayant seulement 132 états, en gardant les états les plus significatifs dans le modèle réduit. Compte tenu des contraintes introduites, la politique de commande obtenue assure une gestion quasi-optimale des ressources d'eau. Une bonne gestion des ressources d'eau est le garant d'une exploitation efficace du système et par conséquent d'un maximum d'énergie électrique débitée.