

CONCLUSION GENERALE

La propriété de double échelle de temps définie dans le cas des chaînes de Markov ergodiques fait appel à la séparation du spectre de la matrice de transition de la chaîne et met en évidence des différences dans l'évolution transitoire des probabilités d'état. Ceci nous a permis d'appliquer les techniques de perturbations singulières pour le découplage des chaînes de Markov.

La propriété de double échelle de pondération est une propriété caractéristique aux chaînes de Markov ergodiques, qui prend en considération la séparation des éléments de la forme propre associée à la valeur propre de 1 de la matrice de transition. Cette propriété concerne l'évolution en régime permanent du modèle et se traduit par l'existence des probabilités limites de différentes grandeurs.

A partir de des deux propriétés des chaînes de Markov ergodiques, nous avons développé trois catégories de méthodes de simplification :

- a) découplage en régime transitoire par application des perturbations singulières sur des chaînes de Markov à double échelle de temps,
- b) découplage en régime permanent des chaînes de Markov à double échelle de pondération,
- c) réduction des chaînes de Markov par l'utilisation conjointe de la double échelle de temps et de la double échelle de pondération.

a) La simplification des chaînes de Markov par l'application des perturbations singulières, permet d'obtenir un sous-système lent qui contient le spectre dominant de la matrice de transition initiale. Ce sous-système conserve par conséquent l'essentiel des caractéristiques probabilistes de la chaîne de Markov initiale. Dans le cas de l'utilisation des méthodes de Bennis, Phillips et des perturbations singulières en continu (avec les transformations homographiques), nous obtenons un sous-système lent stochastique. La résolution de la chaîne de Markov initiale est ainsi ramenée à la résolution de sa partie lente par la méthode directe. Dans le cas de la méthode El Moudni, une technique de redondance permet de redonner la propriété de stochasticité au sous-système lent.

b) L'analyse du comportement asymptotique du système nous a permis d'introduire la notion de double échelle de pondération d'une chaîne de Markov ergodique. Par l'intermédiaire du découplage en régime permanent, nous avons obtenu deux sous-systèmes : l'un fort et l'autre

faible, qui conservent la propriété de stochasticité et qui peuvent être résolus de façon indépendante. Le comportement asymptotique de ces sous-systèmes caractérise le comportement du système initial en régime permanent.

c) L'étude de la chaîne de Markov ergodique durant toute la période d'évolution de ses probabilités d'état (régime transitoire et régime permanent) nous a permis de développer une méthode de réduction spécifique qui prend en compte simultanément les propriétés de double échelle de temps et de double échelle de pondération du modèle. Le système réduit ainsi obtenu est composé des états forts et des états lents du système initial.

La classe des chaînes de Markov à commande que nous avons étudiée est représentée par les équations bilinéaires. Pour ce type de systèmes, nous avons défini les propriétés de double échelle de temps et de double échelle de pondération. En faisant une extension des techniques appliquées sur les systèmes bilinéaires en continu, nous avons appliqué la méthode de perturbations singulières de Bennis respectivement le découplage en régime permanent. Les systèmes découplés ne conservent pas leur forme bilinéaire initiale. Par utilisation de la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose, ces sous-systèmes sont ramenés sous une forme bilinéaire.

Après l'application des perturbations singulières, la commande optimale de la chaîne de Markov revient à calculer la commande optimale de la partie lente stochastique, suivie d'une réinjection des résultats de cette partie dans le système initial pour effectuer le calcul de commande optimale de la partie rapide. Dans le cas du découplage en régime permanent, les deux sous-systèmes fort et faible stochastiques permettent le calcul de la commande optimale de chaque partie séparément.

Pour illustrer les méthodes de simplification développées, nous avons étudié le système hydro-énergétique Jura-Morvan, situé sur le cours du Doubs. L'identification du système montre l'utilité des chaînes de Markov pour la modélisation et la résolution du problème de la commande. La gestion des ressources d'eau fait intervenir les chaînes de Markov bilinéaires à commande. Pour réduire la taille du modèle obtenu, nous avons appliqué en premier le découplage en régime permanent, en gardant seulement les niveaux d'eau les plus probables de chaque barrage. Le modèle global associé à l'étude de l'ensemble du système hydro-énergétique étudié se trouve ainsi réduit et nous pouvons effectuer le calcul de la commande optimale. Dans ce calcul, les situations extrêmes représentées par les états où les barrages sont vides, exigent l'introduction d'une commande plus élaborée. Ces situations forment la partie lente du modèle global. Cette partie peut être étudiée séparément, en utilisant les perturbations singulières.

A la suite de ces travaux, deux voies sont à présent à l'étude. Vu le lien qui existe entre les chaînes de Markov et les réseaux de Petri stochastiques, il nous apparaît intéressant de développer une méthode de découplage graphique applicable directement sur ce type de modèles. La deuxième direction d'étude consiste à généraliser les techniques de simplification des chaînes de Markov à commande à une classe plus large de modèles non linéaires.