

### *CHAPITRE III*

## ***UTILISATION DE L'ECHELLE DE PONDERATION POUR LA SIMPLIFICATION ET LA REDUCTION DES CHAINES DE MARKOV***



## ***I. Introduction***

La conception et la mise en place de systèmes complexes nécessitent l'étude approfondie des perspectives d'évolution à très long terme. Lorsque cette évolution dépend d'un nombre quelconque de paramètres aléatoires, la chaîne de Markov s'avère être un outil de modélisation très performant. Son utilisation offre la possibilité de calculer la distribution limite, élément essentiel pour l'étude du régime permanent.

Dans le chapitre précédent, nous avons appliqué les techniques des perturbations singulières aux chaînes de Markov ergodiques de grandes dimensions qui présentent la propriété de double échelle de temps. Le principe de découplage repose sur une étude des dynamiques du système durant le régime transitoire de son évolution. Cette méthode ne prend pas en considération l'importance de l'état dans le comportement à long terme du système stochastique.

Dans ce chapitre nous proposons des méthodes de simplification des chaînes de Markov ergodiques en considérant le comportement asymptotique du modèle. Dans ce sens, nous nous intéressons à la détection des parties du système caractérisé par des probabilités limites très différentes. Nous appelons "pondérations" les valeurs de ces probabilités. Nous introduisons ainsi des techniques de réduction basées sur la propriété de "double échelle de pondération" d'une chaîne de Markov ergodique.

L'analyse de l'évolution à long terme offre une image complémentaire à celle donnée par l'application des perturbations singulières, en introduisant des méthodes de découplage spécifiques au régime permanent. Nous pouvons ainsi approfondir l'étude de la chaîne de Markov, en proposant des méthodes de simplification appropriées, selon le cas concret modélisé et les types d'évolution qui nous intéressent.

Pour introduire les notions associées à l'étude du régime permanent de la chaîne de Markov ergodique, nous commençons par la présentation des éléments algébriques nécessaires.

## ***II. Résultats concernant la distribution limite d'une chaîne de Markov***

### ergodique

Soit l'équation fondamentale d'une chaîne de Markov irréductible homogène :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathbf{\dagger} \quad (\text{III.1})$$

où  $\mathbf{P}(n)$  á  $\hat{e}^{1 \times r}$  est le vecteur des probabilités d'états de composantes  $P_i(n)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , et  $\mathbf{\dagger} \hat{e}^{r \times r}$  est la matrice de transition d'éléments  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, r$ .

Nous avons montré par la formule (II.11) du chapitre précédent que la forme générale de la distribution des probabilités d'une chaîne de Markov est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n) = & v \mathbf{f}_1^* + (\lambda_2)^n \psi_2 \mathbf{f}_2^* + \dots + (\lambda_d)^n \psi_d \mathbf{f}_d^* + (\lambda_{d+1})^n \psi_{d+1} \mathbf{f}_{d+1}^* + \Phi_{d+2}(n, \lambda_{d+1}) \mathbf{f}_{d+2}^* + \dots \\ & + \Phi_{d+k_{d+1}}(n, \lambda_{d+1}) \mathbf{f}_{d+k_{d+1}}^* + \dots + (\lambda_m)^n \psi_m \mathbf{f}_{r-k_m+1}^* + \dots + \Phi_r(n, \lambda_m) \mathbf{f}_r^* \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

où  $\mathbf{f}_i^* = \mathbf{Erreur} !$ , ( $i = 1, \dots, r$ ) sont les formes propres généralisées de la matrice  $\mathbf{\dagger}$

$\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ( $m \leq r$ ) sont les valeurs propres distinctes de  $\mathbf{\dagger}$

$d$  le nombre de valeurs propres simples de la matrice de transition  $\mathbf{\dagger}$  ( $d \leq m$ )

$\psi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont constantes

et

$\Phi_j(n, \lambda)$  ( $j = d+2, \dots, r$ ) des fonctions du temps  $n$  et de la valeur propre  $\lambda$ .

Dans le cas d'une matrice de transition est diagonalisable, la forme (III.2) du vecteur des probabilités d'état s'écrit (voir formule (II.17) du chapitre II) :

$$\mathbf{P}(n) = v \cdot \mathbf{f}_1 + (\lambda_2)^n \varpi_2 \cdot \mathbf{f}_2 + \dots + (\lambda_r)^n \varpi_r \cdot \mathbf{f}_r \quad (\text{III.3})$$

avec  $\mathbf{f}_i = \mathbf{Erreur} !$ , ( $i = 1, \dots, r$ ) les formes propres de la matrice  $\mathbf{\dagger}$ ,

$$\varpi_i = \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ \dots \\ v_i^r \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{v}_i$ , ( $i = 1, \dots, r$ ) représentent les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{\dagger}$ .

#### Théorème 4

*La distribution limite d'une chaîne de Markov homogène finie irréductible et ergodique est proportionnelle à la forme propre correspondant à la valeur propre 1 de la matrice de transition.*

-Démonstration-

Dans le cas des chaînes de Markov irréductibles ergodiques, la matrice de transition admet une seule valeur propre égale à 1 ( $\lambda_1$ ). Les modules des autres valeurs propres sont inférieurs à 1. Par conséquent, les valeurs limites de leurs puissances d'ordre  $n$  sont toutes égales à zéro :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_i)^n = 0, \quad \forall i = 2, \dots, r.$$

dans ce cas, la limite de la distribution (III.2) peut s'écrire dans le cas général sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [ & v \mathbf{f}_1^* + (\lambda_2)^n \psi_2 \mathbf{f}_2^* + \dots + (\lambda_d)^n \psi_d \mathbf{f}_d^* + (\lambda_{d+1})^n \psi_{d+1} \mathbf{f}_{d+1}^* + \\ & + \Phi_{d+2}(n, \lambda_{d+1}) \mathbf{f}_{d+2}^* + \dots + \Phi_{d+k_{d+1}}(n, \lambda_{d+1}) \mathbf{f}_{d+k_{d+1}}^* + \dots + (\lambda_m)^n \psi_m \mathbf{f}_{r-k_m+1}^* + \dots + \Phi_r(n, \lambda_m) \mathbf{f}_r^* ] \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

et dans le cas d'une matrice de transition diagonalisable l'expression (III.4) donne la relation suivante :

$$\mathbf{P}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( v \cdot \mathbf{f}_1 + (\lambda_2)^n \bar{\omega}_2 \cdot \mathbf{f}_2 + \dots + (\lambda_r)^n \bar{\omega}_r \cdot \mathbf{f}_r \right) \quad (\text{III.5})$$

avec  $\bar{\omega}_i$  définis par (III.3).

Les fonctions  $\Phi(n, \lambda)$  contiennent des éléments de type  $\frac{n-i}{n} \lambda^{n-i}$ , avec  $i$  prenant des valeurs finies, indépendantes de  $n$ . Le calcul de la limite quand  $n$  tend vers l'infini d'un tel produit se fait de la façon suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-i}{n} \lambda^{n-i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!} \frac{(\lambda)^n}{(\lambda)^i} \right) = \frac{1}{i!} \lim_{n \rightarrow \infty} (n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1) (\lambda)^n) = 0$$

Les expressions (III.4) et (III.5) deviennent :

$$\mathbf{P}(\infty) = v \mathbf{f}_1^* \quad (\text{III.6})$$

respectivement dans le cas d'une matrice diagonalisable :

$$\mathbf{P}(\infty) = v \mathbf{f}_1 \quad (\text{III.7})$$

Pour une chaîne de Markov irréductible ergodique, la valeur propre 1 est singulière et par conséquent la forme propre généralisée associée n'est autre que la forme propre correspondant à la valeur propre 1 :

$$\mathbf{f}_1^* = \mathbf{f}_1$$

Nous constatons que la valeur limite de la distribution des probabilités d'état d'une chaîne de Markov irréductible ergodique est *proportionnelle* à la forme propre  $\mathbf{f}_1$  correspondant à la valeur propre 1 de sa matrice de transition. Cette forme propre constitue l'image du comportement asymptotique de la chaîne de Markov.

□

Les probabilités limites des états d'une chaîne de Markov ergodique peuvent prendre des valeurs très différentes. Il devient ainsi utile d'identifier les états caractérisés par des probabilités limites forte et faible. Il s'ensuit alors une définition de la notion de pondération.

### Définition

*Nous appelons "pondération" d'un état d'une chaîne de Markov ergodique irréductible, la valeur de sa probabilité limite. Une pondération est dite forte si la probabilité limite qui lui est associée est grande, et une pondération est dite faible si la probabilité limite qui lui est associée est petite.*

□

Dans la situation où les pondérations des états d'une chaîne de Markov présentent des ordres de grandeur très différents, les états peuvent être regroupés selon une *échelle de pondération*, d'où l'idée d'introduction de la *multi-échelle de pondération*.

## III. Définition de la propriété de double échelle de pondération d'une chaîne de Markov ergodique

### Définition

*Une chaîne de Markov homogène, irréductible, finie et ergodique :*

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathbf{\dagger}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.8})$$

$\mathbf{P}(n) \text{ 'ê}^{1 \times r} \text{ de conditions initiales } \mathbf{P}(0),$

*possède la propriété de double échelle de pondération si l'équation fondamentale (III.8) peut s'écrire sous une forme bloc diagonale*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_s(n+1) & \mathbf{W}_w(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_s(n) & \mathbf{W}_w(n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\dagger}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{\dagger}_w \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

*de telle façon que*

$$\min_{\substack{\mathbf{f}_1^i \text{ 'á } \mathbf{f}_{1(s)}^i}} \left| \mathbf{f}_1^i \right| \gg \max_{\substack{\mathbf{f}_1^k \text{ 'á } \mathbf{f}_{1(w)}^k}} \left| \mathbf{f}_1^k \right| \quad (\text{III.10})$$

*avec la forme propre associée à la valeur propre 1 (unique) de la matrice de transition  $\mathbf{\dagger}$  :*

$\mathbf{f}_1 = [f_1^1 \ f_1^2 \ \dots \ f_1^r] = [\mathbf{f}_{1(s)} \ \mathbf{f}_{1(w)}]$ ,  $\mathbf{f}_{1(s)} \hat{\mathbf{a}}^{r_1}$  et  $\mathbf{f}_{1(w)} \hat{\mathbf{a}}^{r_2}$ ,  
 et  
 $\mathbf{f}_{1(s)}$  représentant la forme propre correspondant à la valeur propre 1 de la matrice  $\dagger_s$ ,  
 $\mathbf{f}_{1(w)}$  représentant la forme propre correspondant à la valeur propre 1 de la matrice  $\dagger_w$ .

□

Dans ce cas, le système (III.8) peut être partitionné en deux sous-systèmes :

$$\mathbf{P}(n) = [\mathbf{S}_s(n) \ \mathbf{W}_w(n)], \mathbf{S}_s \hat{\mathbf{e}}^{1 \times r_1}, \mathbf{W}_w \hat{\mathbf{e}}^{1 \times r_2} \quad (r_1 + r_2 = r)$$

où

$$\mathbf{S}_s(n) = [S_1(n) \ S_2(n) \ \dots \ S_{r_1}(n)] \text{ est appelée distribution des probabilités de la partie forte}$$

et  $\mathbf{W}_w(n) = [W_1(n) \ W_2(n) \ \dots \ W_{r_2}(n)]$  distribution des probabilités de la partie faible.

Dans la forme (III.9), la matrice  $\dagger_s \hat{\mathbf{e}}^{r_1 \times r_1}$  regroupe les probabilités de transition entre les états forts et  $\dagger_w \hat{\mathbf{e}}^{r_2 \times r_2}$  regroupe les probabilités de transition entre les états faibles.

La propriété de double échelle de pondération d'une chaîne de Markov irréductible ergodique permet l'étude du système dans son régime permanent. La partie forte contient les états caractérisés par une grande probabilité limite et la partie faible, les états ayant une probabilité limite très petite. Ce point de vue présente un grand intérêt pour la détection de l'importance des états dans le comportement asymptotique du système. Pour évaluer cette échelle de pondération, nous définissons le paramètre suivant :

$$\mu_p = \frac{\min_{\mathbf{f}_1 \hat{\mathbf{a}} \mathbf{f}_{1(w)}} \left| \mathbf{f}_1 \right|}{\max_{\mathbf{f}_1 \hat{\mathbf{a}} \mathbf{f}_{1(s)}} \left| \mathbf{f}_1 \right|} \quad \text{à } [0, 1]$$

appelé *coefficient de découplage des pondérations*.

#### IV. Utilisation de la double échelle de pondération pour la simplification des chaînes de Markov ergodiques

Comme pour les perturbations singulières, nous allons développer une technique de mise en évidence des échelles de pondération et une méthode de découplage.

##### IV.1. Mise en évidence des pondérations d'une chaîne de Markov

Reprenons le système représenté par l'équation (III.8). La mise en évidence des échelles de pondération exige tout d'abord un arrangement de la matrice de transition et du vecteur des probabilités en considérant l'évolution permanente des probabilités d'état du système. L'arrangement selon les pondérations du système est obtenu en partant de la forme propre  $\mathbf{f}_1$ , en la mettant en ordre décroissant par rapport aux modules des ses éléments. Dans ce but, nous utilisons la permutation  $J : \{1, 2, 3, \dots, r\} \rightarrow \{j_1, j_2, j_3, \dots, j_r\}$  telle que les éléments de la forme propre

$$\mathbf{f}_1 = [f_1^1 \ f_1^2 \ \dots \ f_1^{r_1} \ f_1^{r_1+1} \ f_1^{r_1+2} \ \dots \ f_1^r]$$

correspondant à la valeur propre singulière  $\lambda_1 = 1$ , se trouvent arrangés de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_1 = [f_{1_1}^1 \ f_{1_1}^2 \ \dots \ f_{1_1}^{r_1} \ f_{1_1}^{r_1+1} \ f_{1_1}^{r_1+2} \ \dots \ f_{1_1}^r] \quad (\text{III.11})$$

telle que :

$$|f_{1_1}^1| \geq |f_{1_1}^2| \geq |f_{1_1}^3| \geq \dots \geq |f_{1_1}^r|. \quad (\text{III.12})$$

Dans ce cas, la matrice de transition initiale prend la forme :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr} \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

dans laquelle les états se trouvent ordonnés en fonction de leur pondération. L'état 1 sera le plus fort, et l'état  $r$  le plus faible.

Lorsque la propriété de double échelle de pondération existe, nous avons l'inégalité :

$$\min_{\mathbf{f}_1 \in \mathbf{f}_{1(s)}} |f_1^i| \gg \max_{\mathbf{f}_1 \in \mathbf{f}_{1(w)}} |f_1^k|$$

et la matrice de transition (III.13) s'écrit sous la forme partitionnée suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \dots & \mathbf{P}_{1r_1} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{P}_{2r_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_{r_1 1} & \mathbf{P}_{r_1 2} & \dots & \mathbf{P}_{r_1 r_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r_1} & p_{1(r_1+1)} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r_1} & p_{2(r_1+1)} & \dots & p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r_1 1} & p_{r_1 2} & \dots & p_{r_1 r_1} & p_{r_1(r_1+1)} & \dots & p_{r_1 r} \\ \hline p_{(r_1+1)1} & p_{(r_1+1)2} & \dots & p_{(r_1+1)r_1} & p_{(r_1+1)(r_1+1)} & \dots & p_{(r_1+1)r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr_1} & p_{r(r_1+1)} & \dots & p_{rr} \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$



où  $r_1$  est le nombre des états forts du système et  $r_2 = r - r_1$  le nombre d'états faibles du système. La matrice  $\dot{T}'_S$  correspondant aux états forts a la dimension  $r_1 \times r_1$ , et la matrice  $\dot{T}'_W$  des états faibles a la dimension  $r_2 \times r_2$ .

Cette partition de la matrice de transition induit une partition du vecteur des probabilités d'état  $\mathbf{P}(n) = [\mathbf{S}(n) \ \mathbf{W}(n)]$ , avec  $\mathbf{S}$  le vecteur de distribution de la partie forte (dimension  $r_1$ ) et  $\mathbf{W}$  le vecteur de distribution de la partie faible (dimension  $r_2$ ). L'équation fondamentale (III.8) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$[\mathbf{S}(n+1) \ \mathbf{W}(n+1)] = [\mathbf{S}(n) \ \mathbf{W}(n)] \begin{pmatrix} \dot{T}'_S & \dot{T}'_{S-W} \\ \dot{T}'_{W-S} & \dot{T}'_W \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

avec les conditions initiales  $\mathbf{S}(0)$  et  $\mathbf{W}(0)$ .

## IV.2. Méthode de découplage des chaînes de Markov à double échelle de pondération

La notion de double échelle de pondération concerne le comportement asymptotique de la chaîne de Markov. Le découplage du système utilise une technique valable en régime permanent d'évolution de ce système.

### IV.2.1. Découplage du système en régime permanent

Reprenons le système partitionné (III.15) qui correspond à une chaîne de Markov finie ergodique à double échelle de pondération. Il se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{S}(n+1) = \mathbf{S}(n) \dot{T}'_S + \mathbf{W}(n) \dot{T}'_{W-S} \\ \mathbf{W}(n+1) = \mathbf{S}(n) \dot{T}'_{S-W} + \mathbf{W}(n) \dot{T}'_W \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

#### b) Partie forte

Suite à la propriété d'ergodicité du système, la distribution limite des probabilités d'état est unique et ne dépend pas des conditions initiales. En considérant le régime permanent de la partie forte, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{S}(n+1) = \mathbf{S}(n) = \mathbf{S}_W(n)$$

Il nous vient alors le système influencé par l'évolution de la partie faible :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_W(n) = \mathbf{S}_W(n) \dot{T}'_S + \mathbf{W}_W(n) \dot{T}'_{W-S} \\ \mathbf{W}_W(n+1) = \mathbf{S}_W(n) \dot{T}'_{S-W} + \mathbf{W}_W(n) \dot{T}'_W \end{cases}$$

et par conséquent, vu que la matrice  $(\mathbf{I} - \dot{T}'_S)$  est inversible, nous obtenons le système fort découplé suivant :

$$\mathbf{W}_w(n+1) = \mathbf{W}_w(n) (\dot{\mathbf{T}}'_w + \dot{\mathbf{T}}'_{w-s} (\mathbf{I} - \dot{\mathbf{T}}'_s)^{-1} \dot{\mathbf{T}}'_{s-w}) \quad (\text{III.17})$$

**b) Partie faible**

En considérant le régime permanent de la partie faible, un raisonnement similaire nous permet de poser :

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) = \mathbf{W}_s(n)$$

Et par conséquent les influences de la partie forte s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_s(n+1) = \mathbf{S}_s(n) \dot{\mathbf{T}}'_s + \mathbf{W}_s(n) \dot{\mathbf{T}}'_{w-s} \\ \mathbf{W}_s(n) = \mathbf{S}_s(n) \dot{\mathbf{T}}'_{s-w} + \mathbf{W}_s(n) \dot{\mathbf{T}}'_w \end{cases}$$

Suite à la régularité de la matrice  $(\mathbf{I} - \dot{\mathbf{T}}'_w)$ , nous obtenons la relation suivante :

$$\mathbf{S}_s(n+1) = \mathbf{S}_s(n) (\dot{\mathbf{T}}'_s + \dot{\mathbf{T}}'_{s-w} (\mathbf{I} - \dot{\mathbf{T}}'_w)^{-1} \dot{\mathbf{T}}'_{w-s}) \quad (\text{III.18})$$

Le système découplé se présente sous la forme suivante :

$$[\mathbf{S}_s(n+1) \quad \mathbf{W}_w(n+1)] = [\mathbf{S}_s(n) \quad \mathbf{W}_w(n)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}}'_s & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{T}}'_w \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

avec :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}'_s &= \dot{\mathbf{T}}'_s + \dot{\mathbf{T}}'_{s-w} (\mathbf{I} - \dot{\mathbf{T}}'_w)^{-1} \dot{\mathbf{T}}'_{w-s} \\ \dot{\mathbf{T}}'_w &= \dot{\mathbf{T}}'_w + \dot{\mathbf{T}}'_{w-s} (\mathbf{I} - \dot{\mathbf{T}}'_s)^{-1} \dot{\mathbf{T}}'_{s-w} \end{aligned}$$

et les conditions initiales  $\mathbf{S}_s(0)$  et  $\mathbf{W}_w(0)$ .

#### IV.2.2. Analyse des sous-systèmes découplés

**a) Système fort**

**a.1.** La matrice  $\dot{\mathbf{T}}'_s$  correspondant au sous-système fort obtenu par le découplage en régime permanent d'une chaîne de Markov ergodique est une matrice stochastique.

- Démonstration -

1°. La somme de chaque ligne de la matrice  $\dot{\mathbf{T}}'_s$  est égale à 1

La matrice de transition initiale  $\dot{\mathbf{T}}$  étant stochastique, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\mathbf{1}_{r_2} - \ddagger'_w \mathbf{1}_{r_2} = \ddagger'_{w-s} \mathbf{1}_{r_1} \quad (\text{III.20})$$

ou sous une autre forme :

$$\mathbf{1}_{r_2} = \left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} \ddagger'_{w-s} \mathbf{1}_{r_1} \quad (\text{III.21})$$

En multipliant à gauche par  $\ddagger'_{s-w}$ , il nous vient :

$$\ddagger'_{s-w} \mathbf{1}_{r_2} = \ddagger'_{s-w} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} \ddagger'_{w-s} \mathbf{1}_{r_1} \quad (\text{III.22})$$

En rajoutant  $\mathbf{1}_{r_1}$  aux deux membres de l'égalité, nous obtenons :

$$\mathbf{1}_{r_1} - \ddagger'_{s-w} \mathbf{1}_{r_2} + \ddagger'_{s-w} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} \ddagger'_{w-s} \mathbf{1}_{r_1} = \mathbf{1}_{r_1} \quad (\text{III.23})$$

La propriété de stochasticité de la matrice initiale nous permet d'écrire :

$$\ddagger'_s \mathbf{1}_{r_1} + \ddagger'_{s-w} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} \ddagger'_{w-s} \mathbf{1}_{r_1} = \mathbf{1}_{r_1} \quad (\text{III.24})$$

ou sous une autre forme :

$$\left( \ddagger'_s + \ddagger'_{s-w} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} \ddagger'_{w-s} \right) \mathbf{1}_{r_1} = \mathbf{1}_{r_1} \quad (\text{III.25})$$

donc :

$$\ddagger'_s \mathbf{1}_{r_1} = \mathbf{1}_{r_1} \quad (\text{III.26})$$

La somme des éléments de chacune des lignes de  $\ddagger'_s$  est égale à 1.

2°. Tous les éléments de la matrice  $\ddagger'_s$  sont non-négatifs.

La norme  $\|\ddagger'_w\| < 1$ , et par conséquent nous pouvons effectuer un développement en série de la matrice  $(\mathbf{I} - \ddagger'_w)^{-1}$ . Nous obtenons ainsi :

$$\left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} = \mathbf{I} + \ddagger'_w + \ddagger'^2_w + \ddagger'^3_w + \dots = \ddagger'^p_w \quad (\text{III.27})$$

La matrice  $\ddagger'_w$  est une matrice non-négative, donc la série sera non-négative et nous pouvons écrire :

$$\left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} \geq 0$$

Comme les matrices  $\ddagger'_s$ ,  $\ddagger'_{s-w}$  et  $\ddagger'_{w-s}$  sont non-négatives, il en sera de même pour la matrice  $\ddagger'_s$  :

$$\ddagger'_s = \ddagger'_s + \ddagger'_{s-w} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_w \right)^{-1} \ddagger'_{w-s} \geq 0 \quad (\text{III.28})$$

Par conséquent, la matrice de transition du sous-système fort est une matrice stochastique.

□

**a.2.** La distribution stationnaire du système fort découplé est proportionnelle à la composante  $\mathbf{f}_{1(s)}$  de la forme propre associée à la valeur propre 1 de la matrice initiale  $\ddagger$ .

- Démonstration -

Soit la forme propre correspondant à la valeur propre 1 de la matrice de transition  $\ddagger$  de la chaîne de Markov initiale :

$$[\mathbf{f}_{1(s)} \mathbf{f}_{1(w)}]$$

avec  $\mathbf{f}_{1(s)} \hat{=}^r_1$  correspondant aux états forts et  $\mathbf{f}_{1(w)} \hat{=}^r_2$  correspondant aux états faibles.

Nous avons l'égalité suivante :

$$[\mathbf{f}_{1(s)} \mathbf{f}_{1(w)}] \ddagger = [\mathbf{f}_{1(s)} \mathbf{f}_{1(w)}]$$

et par conséquent, en utilisant la forme partitionnée (III.15), nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{1(s)} = \mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{ss} + \mathbf{f}_{1(w)} \ddagger'_{ws} \\ \mathbf{f}_{1(w)} = \mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{sw} + \mathbf{f}_{1(w)} \ddagger'_{ww} \end{cases} \quad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \quad (III.29)$$

Ceci nous permet d'écrire par la suite :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{1(s)} = \mathbf{f}_{1(w)} \ddagger'_{ws} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_{ss} \right)^{-1} \\ \mathbf{f}_{1(w)} = \mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{sw} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_{ww} \right)^{-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \quad (III.30)$$

En multipliant à droite l'égalité (III.30)-b par  $\ddagger'_{ws}$  nous obtenons :

$$\mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{sw} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_{ww} \right)^{-1} \ddagger'_{ws} = \mathbf{f}_{1(w)} \ddagger'_{ws}$$

En rajoutant  $\mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{ss}$  aux deux membres de l'égalité, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{ss} + \mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{sw} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_{ww} \right)^{-1} \ddagger'_{ws} = \mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{ss} + \mathbf{f}_{1(w)} \ddagger'_{ws}$$

et par conséquent, en considérant (III.29)-a nous obtenons :

$$\mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{ss} + \mathbf{f}_{1(s)} \ddagger'_{sw} \left( \mathbf{I} - \ddagger'_{ww} \right)^{-1} \ddagger'_{ws} = \mathbf{f}_{1(s)}$$

donc

$$\mathbf{f}_{1(s)} \dot{\dagger}_s = \mathbf{f}_{1(s)} \quad (\text{III.31})$$

□

### b) Système faible

**b.1.** La matrice  $\dot{\dagger}_w$  correspondant au sous-système faible obtenu par le découplage en régime permanent d'une chaîne de Markov ergodique est une matrice stochastique.

- Démonstration -

1°. La somme de chaque ligne de la matrice  $\dot{\dagger}_w$  est égale à 1

La matrice de transition initiale  $\dot{\dagger}$  étant stochastique, nous pouvons écrire, la relation suivante :

$$\mathbf{1}_{r_1} - \dot{\dagger}'_s \mathbf{1}_{r_1} = \dot{\dagger}'_{s-w} \mathbf{1}_{r_2} \quad (\text{III.32})$$

En procédant de façon similaire que dans le cas du système fort, nous obtenons :

$$\mathbf{1}_{r_2} - \dot{\dagger}'_{w-s} \mathbf{1}_{r_1} + \dot{\dagger}'_{w-s} \left( \mathbf{I} - \dot{\dagger}'_s \right)^{-1} \dot{\dagger}'_{s-w} \mathbf{1}_{r_2} = \mathbf{1}_{r_2}$$

Par la suite, la propriété de stochasticité de la matrice initiale nous permet d'écrire :

$$\dot{\dagger}'_w \mathbf{1}_{r_2} + \dot{\dagger}'_{w-s} \left( \mathbf{I} - \dot{\dagger}'_s \right)^{-1} \dot{\dagger}'_{s-w} \mathbf{1}_{r_2} = \mathbf{1}_{r_2}$$

donc :

$$\dot{\dagger}'_w \mathbf{1}_{r_2} = \mathbf{1}_{r_2} \quad (\text{III.33})$$

La somme des éléments de chacune des lignes de  $\dot{\dagger}_w$  est égale à 1.

2°. Tous les éléments de la matrice  $\dot{\dagger}_w$  sont non-négatifs.

Vu que  $\|\dot{\dagger}'_s\| < 1$ , nous pouvons effectuer un développement en série de la matrice  $(\mathbf{I} - \dot{\dagger}'_s)^{-1}$ . Nous obtenons par conséquent :

$$\left( \mathbf{I} - \dot{\dagger}'_s \right)^{-1} = \mathbf{I} + \dot{\dagger}'_s + \dot{\dagger}'_s{}^2 + \dot{\dagger}'_s{}^3 + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \dot{\dagger}'_s{}^p \quad (\text{III.34})$$

Les matrices  $\dot{\dagger}'_w$ ,  $\dot{\dagger}'_{w-s}$  et  $\dot{\dagger}'_{s-w}$  sont non-négatives. Par conséquent, il en sera de même pour la matrice  $\dot{\dagger}_w$  :

$$\dot{\dagger}'_w = \dot{\dagger}'_w + \dot{\dagger}'_{w-s} \left( \mathbf{I} - \dot{\dagger}'_s \right)^{-1} \dot{\dagger}'_{s-w} \geq 0 \quad (\text{III.35})$$

La matrice de transition du sous-système faible est une matrice stochastique.

□

**b.2.** La distribution stationnaire du système faible découplé est proportionnelle à la composante  $\mathbf{f}_{1(w)}$  de la forme propre associée à la valeur propre 1 de la matrice initiale  $\mathbf{\ddagger}$ .

- Démonstration -

Reprenons l'égalité (III.30)-a que nous multiplions à droite par  $\mathbf{\ddagger}'_{s-w}$  :

$$\mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_{w-s} \left( \mathbf{I} - \mathbf{\ddagger}'_s \right)^{-1} \mathbf{\ddagger}'_{s-w} = \mathbf{f}_{1(s)} \mathbf{\ddagger}'_{s-w} \quad (\text{III.36})$$

En rajoutant  $\mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_w$  aux deux membres de l'égalité, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_w + \mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_{w-s} \left( \mathbf{I} - \mathbf{\ddagger}'_s \right)^{-1} \mathbf{\ddagger}'_{s-w} = \mathbf{f}_{1(s)} \mathbf{\ddagger}'_{s-w} + \mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_w$$

et par conséquent, en considérant (III.29)-b nous obtenons :

$$\mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_w + \mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_{w-s} \left( \mathbf{I} - \mathbf{\ddagger}'_s \right)^{-1} \mathbf{\ddagger}'_{s-w} = \mathbf{f}_{1(w)}$$

donc :

$$\mathbf{f}_{1(w)} \mathbf{\ddagger}'_w = \mathbf{f}_{1(w)} \quad (\text{III.37})$$

□

Les résultats obtenus nous permettent de valider le découplage en régime permanent. En effet, les sous-systèmes fort et faible ainsi obtenus conservent d'une part la propriété de stochasticité du système initial et d'autre part les caractéristiques du comportement en régime permanent des états forts et respectivement faible du système initial.

#### IV.2.3. Résolution des sous-systèmes par la méthode directe

Par rapport à la résolution des systèmes découplés par la méthode des perturbations singulières où seule la partie lente est stochastique, la résolution des sous-systèmes fort et faible se fait de façon indépendante. Les deux matrices de transition obtenues suite au découplage en régime permanent sont stochastiques et par conséquent chaque partie découplée représente une chaîne de Markov.

##### a) Résolution de la partie forte

La formule fondamentale de la chaîne de Markov formée par les états forts, présente la forme suivante :

$$\mathbf{S}_s(n+1) = \mathbf{S}_s(n) \mathbf{\ddagger}_s \quad (\text{III.38})$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{bmatrix} S_1(0) & S_2(0) & \dots & S_{r_1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(0) & P_2(0) & \dots & P_{r_1}(0) \end{bmatrix} \alpha_s$$

où le facteur constant  $\alpha_s$  fait apparaître le caractère fort du sous-système. Ce facteur est donné

par :

$$\alpha_s = \frac{\sum_{i=1}^{r_1} |f_{1(s)}^i|}{\sum_{i=1}^r P_i(0) \sum_{i=1}^r |f_1^i|}$$

avec  $f_1^i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) les éléments de la forme propre arrangée

$$f_1 = [f_{1(s)} \ f_{1(w)}] \text{ où } f_{1(s)} \in \mathbb{R}^{1 \times r_1}, \ f_{1(w)} \in \mathbb{R}^{1 \times r_2}$$

La méthode directe nous permet de calculer les probabilités limites du système fort :

$$\begin{cases} S_s(0) - D_s = 0 \\ S_1(0) + S_2(0) + S_3(0) + \dots + S_{r_1}(0) = S_i(0) \end{cases} \quad \begin{matrix} r_1 \\ i=1 \end{matrix} \quad (\text{III.39})$$

avec :  $D_s = \dot{\mathbf{f}}_s - \mathbf{I}_{r_1}$  ( $\mathbf{I}_{r_1}$  est la matrice unité  $r_1 \times r_1$ ) et

$$S_s(0) = [S_1(0) \ S_2(0) \ \dots \ S_{r_1}(0)]$$

Nous avons obtenu le système correspondant aux états forts. La chaîne de Markov initiale se trouve donc réduite à un système contenant sa partie prépondérante dans l'évolution asymptotique.

Même si dans la plupart des situations, la partie forte représente l'essentiel du comportement du système en régime permanent, certains problèmes demandent l'étude de la partie faible du modèle markovien. Ceci correspond aux situations dans lesquelles nous désirons exploiter les événements qui n'apparaissent pas très souvent dans l'évolution à long terme, comme c'est le cas dans l'étude des pannes des machines dans un système de production.

### ***b) Résolution de la partie faible***

L'équation fondamentale de la partie faible est représentée par :

$$\mathbf{W}_{w(n+1)} = \mathbf{W}_{w(n)} \dot{\mathbf{f}}_w \quad (\text{III.40})$$

avec les conditions initiales

$$[W_1(0) \ W_2(0) \ \dots \ W_{r_2}(0)] = [P_{r_1+1}(0) \ P_{r_1+2}(0) \ \dots \ P_r(0)] \ \alpha_w$$

avec le facteur constant  $\alpha_w$  qui fait intervenir le caractère faible du système, est donné par :

$$\alpha_w = \frac{\prod_{i=1}^{r_2} |f_{1(w)}^i|}{\prod_{i=r_1+1}^r P_i(0) \prod_{i=1}^r |f_1^i|}$$

avec  $f_1^i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) les éléments de la forme propre arrangée

$$\mathbf{f}_1 = [\mathbf{f}_{1(s)} \ \mathbf{f}_{1(w)}] \text{ où } \mathbf{f}_{1(s)} \in \mathbb{R}^{1 \times r_1}, \ \mathbf{f}_{1(w)} \in \mathbb{R}^{1 \times r_2}$$

La résolution limite du système faible utilise la méthode directe :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_w(0) \ \mathbf{D}_w = 0 \\ \mathbf{W}_1(0) + \mathbf{W}_2(0) + \mathbf{W}_3(0) + \dots + \mathbf{W}_{r_2}(0) = \sum_{i=1}^{r_2} \mathbf{W}_i(0) \end{cases} \quad (III.41)$$

avec  $\mathbf{D}_w = \mathbf{I}_w - \mathbf{I}_{r_2}$  et

$$\mathbf{W}_w(0) = [\mathbf{W}_1(0) \ \mathbf{W}_2(0) \ \dots \ \mathbf{W}_{r_2}(0)]$$

Les vecteurs des probabilités d'état  $\mathbf{S}_s(n)$  et  $\mathbf{W}_w(n)$  ainsi obtenus, représentent une approximation des distributions réelles  $\mathbf{S}(n)$  respectivement  $\mathbf{W}(n)$  du système initial. La somme des probabilités d'état des sous-systèmes est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^{r_1} S_i(n) + \sum_{i=1}^{r_2} W_i(n) = 1$$

La stochasticité du vecteur des probabilités du système initial est ainsi obtenue.

#### IV.2.4. Interprétation des résultats obtenus

Le principe du découplage en régime permanent consiste à obtenir deux sous-systèmes fort et faible qui évoluent indépendamment. La chaîne de Markov à double échelle de pondération peut être ainsi étudiée séparément, en prenant en compte deux sous-systèmes conditionnés formés par des états ayant le même comportement asymptotique.



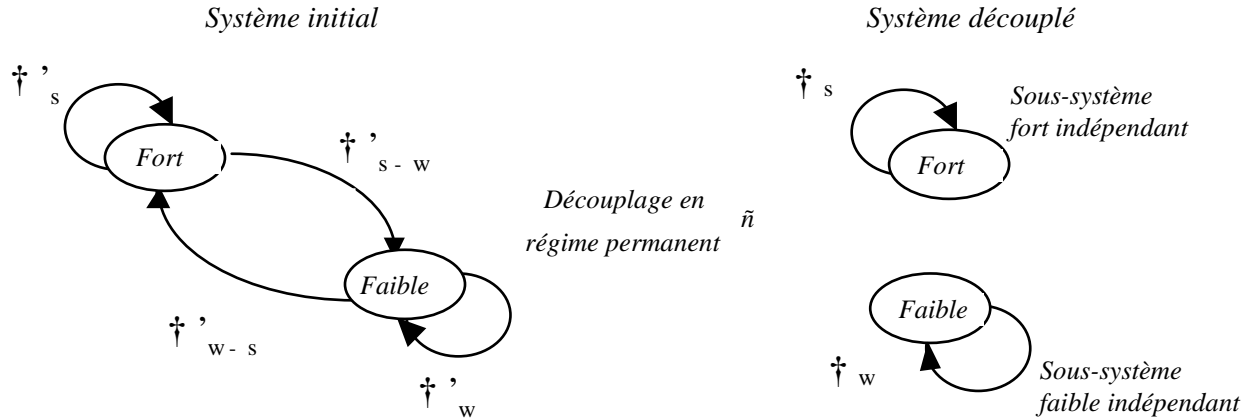


Fig. III. 1. Principe du découplage des chaînes de Markov à double échelle de pondération.

Les solutions des sous-systèmes découplés constituent une approximation des solutions du système uniquement en régime permanent d'évolution.

### V. Utilisation conjointe de la double échelle de temps et de la double échelle de pondération dans l'étude des chaînes de Markov ergodiques

La modélisation des processus aléatoires demande parfois une analyse mixte du régime d'évolution des probabilités d'état. Ceci devient intéressant surtout lors de la recherche d'une réduction qui puisse garder l'essentiel de l'évolution du système initial, autant en régime transitoire qu'en régime permanent. Nous nous retrouvons donc devant une situation plus complexe, caractérisée par une analyse qui devra prendre en compte aussi bien la double échelle de temps que la double échelle de pondération des états de la chaîne de Markov.

Pour conserver la précision du modèle, la réduction des chaînes de Markov de grande taille impose l'élimination des états qui ont un rôle négligeable dans l'évolution du système. Dans cet ordre d'idée, nous proposons une réduction du modèle par élimination des états qui ont une évolution transitoire de courte durée (états rapides) et qui présentent en même temps un régime permanent faible. En effet, les états faibles-rapides représentent la partie du système qui n'a ni une évolution de longue durée, ni un régime permanent consistant. La partie la plus intéressante pour l'étude du système aléatoire est donc formée par les états forts et ceux qui ont une évolution lente. Une réduction du modèle à cette partie peut apporter les informations essentielles sur le comportement autant transitoire que permanent du système et permet de faciliter son analyse.

Notre méthode demande en premier un arrangement des états de la chaîne de Markov ergodique dans l'ordre décroissant des pondérations. L'existence de la double échelle de temps nous permet de mettre en évidence les états lents. En sélectionnant les états forts jusqu'au plus faible état lent, nous utilisons par la suite des approches nous permettant l'élimination des états faibles-rapides. La réduction prend en compte principalement l'échelle de pondération, mais la technique utilise les caractéristiques d'évolution rapide des probabilités des états éliminés. La méthode présentée exploite conjointement deux propriétés de la chaîne de Markov ergodique : l'échelle de pondération et l'échelle de temps.

La première étape de la méthode consiste à arranger la matrice de transition selon l'échelle de pondération. Pour cela, on utilise la permutation présentée dans le paragraphe IV.1. Cette permutation provient de la forme propre attachée à la valeur propre 1 de la matrice de transition et consiste à obtenir une décroissance des pondérations des états dans le modèle markovien. Par la suite, la mise en évidence des états lents utilise une technique analytique appliquée sur la matrice modale, technique inspirée des travaux de [PHP, 80] :

### V.1. Mise en évidence de la double échelle de temps dans la matrice modale

Dans la forme du vecteur des probabilités d'état de la chaîne de Markov ergodique étudiée :

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1 + \varpi_2 \cdot \mathbf{f}_2 \cdot (\lambda_2)^n + \dots + \varpi_r \cdot \mathbf{f}_r \cdot (\lambda_r)^n \quad (\text{III.42})$$

les valeurs propres (évolutions élémentaires du système) à petit module ont une influence réduite sur l'évolution du système. De ce point de vue, la double échelle de temps de la chaîne peut être utile. Nous détectons donc les deux groupes de valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1 > |\lambda_{c_2}| \quad |\lambda_{c_3}| \quad \dots \quad |\lambda_{c_1}| \gg |\lambda_{c_{i+1}}| \quad |\lambda_{c_{i+2}}| \quad \dots \quad |\lambda_{c_r}| \quad (\text{III.43})$$

Parmi ces deux groupes, seulement celui des valeurs propres à modules grands sera retenu pour l'étude qui va suivre. Nous appelons ce groupe de valeurs propres *spectre dominant* de la chaîne de Markov :

$$\left\{ 1, \lambda_{c_2}, \lambda_{c_3}, \dots, \lambda_{c_1} \right\} \quad (\text{III.44})$$

Ces valeurs propres suffisent pour approximer la solution générale :

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1 + \varpi_{c_2} \cdot \mathbf{f}_{c_2} \cdot (\lambda_{c_2})^n + \varpi_{c_3} \cdot \mathbf{f}_{c_3} \cdot (\lambda_{c_3})^n + \dots + \varpi_{c_1} \cdot \mathbf{f}_{c_1} \cdot (\lambda_{c_1})^n \quad (\text{III.45})$$

et pour permettre par la suite une étude du type d'évolution de chaque composante du vecteur des probabilités d'états.

Nous précisons que nous n'avons pas fait, par le choix des valeurs propres à grand module, une deuxième permutation de la matrice de transition. C'est uniquement un choix analytique du spectre dominant qui nous donne une image suffisamment précise de l'évolution transitoire des probabilités d'état  $\mathbf{P}_i(n)$ .

De la matrice des formes propres correspondant à la matrice de transition de la chaîne de Markov :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_r \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_1 & f^2_1 & \dots & f^r_1 \\ f^1_2 & f^2_2 & \dots & f^r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1_r & f^2_r & \dots & f^r_r \end{pmatrix} \quad (\text{III.46})$$

nous choisissons les formes propres associées au spectre dominant retenu précédemment :

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{c_2} \\ \mathbf{f}_{c_3} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{c_l} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_1 & f^2_1 & \dots & f^r_1 \\ f^1_{c_2} & f^2_{c_2} & \dots & f^r_{c_2} \\ f^1_{c_3} & f^2_{c_3} & \dots & f^r_{c_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1_{c_l} & f^2_{c_l} & \dots & f^r_{c_l} \end{pmatrix} \quad (\text{III.47})$$

Les formes propres :

$$\left\{ \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_{c_2}, \mathbf{f}_{c_3}, \dots, \mathbf{f}_{c_l} \right\} \quad (\text{III.48})$$

de la *matrice modale dominante*  $\mathbf{F}_1$ , assurent la distribution de l'influence des modes propres dominants à l'ensemble des états de la chaîne de Markov ergodique.

Ce qui nous intéresse par la suite, c'est de déterminer la taille du système réduit, de telle façon que tous les états forts et les états lents s'y trouvent inclus. Si tous les états lents du système se situent parmi les états forts, nous allons réduire le système à sa partie forte. Sinon, nous allons garder dans le système réduit tous les états plus forts que le plus faible état lent.

## V.2. Calcul de la dimension du système réduit

Nous présentons l'algorithme de calcul de la dimension du système réduit, ainsi que la mise en évidence des états correspondants. Cet algorithme s'applique aux chaînes de Markov irréductibles ergodiques présentant les propriétés de double échelle de temps et double échelle de pondération conjointement.

Pour mettre en évidence les états lents, nous utilisons une technique analytique [PHP, 80] qui consiste à effectuer une élimination Gaussienne avec pivot simple sur la matrice  $\mathbf{F}_1$ . La matrice de permutation  $\mathbf{H}$  va induire un positionnement des colonnes les plus indépendantes dans la partie gauche de la matrice  $\mathbf{F}_1$  :

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1_1} & \mathbf{F}_{1_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_{1_1}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F}_{1_2}^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

avec  $\mathbf{F}_{1_1}$  la matrice formée par les colonnes les plus indépendantes de  $\mathbf{F}_1$ . Le nombre de ces colonnes est égal au nombre de modes propres dominants de la matrice de transition  $\ddagger$ . Nous obtenons ainsi les positions  $h_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) des états lents.

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{1_1}^{h_1} & f_{1_1}^{h_2} & \dots & f_{1_1}^{h_1} & f_{1_1}^{h_1+1} & \dots & f_{1_1}^{h_r} \\ f_{c_2}^{h_1} & f_{c_2}^{h_2} & \dots & f_{c_2}^{h_1} & f_{c_2}^{h_1+1} & \dots & f_{c_2}^{h_r} \\ f_{c_3}^{h_1} & f_{c_3}^{h_2} & \dots & f_{c_3}^{h_1} & f_{c_3}^{h_1+1} & \dots & f_{c_3}^{h_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{c_l}^{h_1} & f_{c_l}^{h_2} & \dots & f_{c_l}^{h_1} & f_{c_l}^{h_1+1} & \dots & f_{c_l}^{h_r} \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

Nous remarquons que cette technique permet la localisation des états lents même dans le cas où les disques de Gershgorine ne se séparent pas, donc la propriété de double échelle de temps ne peut pas être mise en évidence à l'aide des méthodes géométriques.

Nous choisissons la dimension  $l^*$  du système réduit, de la façon suivante :

$$l^* = \max \left\{ \max_{i=1, \dots, l} \{ h_i \}, F \right\} \quad (\text{III.51})$$

où  $F$  représente le nombre d'états forts du système. Cette technique nous permet la détection du nombre  $l^*$  des états forts à évolution globalement lente de leurs probabilités d'état. La matrice modale devient :

$$\mathbf{F}_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{partie forte globalement lente} \end{array} & \begin{array}{c} \text{partie faible-rapide} \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccccccc} f_1^1 & f_1^2 & \dots & f_1^{l^*} & f_1^{l^*+1} & \dots & f_1^r \\ f_{c_2}^1 & f_{c_2}^2 & \dots & f_{c_2}^{l^*} & f_{c_2}^{l^*+1} & \dots & f_{c_2}^r \\ f_{c_3}^1 & f_{c_3}^2 & \dots & f_{c_3}^{l^*} & f_{c_3}^{l^*+1} & \dots & f_{c_3}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{c_l}^1 & f_{c_l}^2 & \dots & f_{c_l}^{l^*} & f_{c_l}^{l^*+1} & \dots & f_{c_l}^r \end{array} \right) \end{array} \quad (\text{III.52})$$

Dans la matrice  $\ddagger$  (déjà arrangée avec les pondérations décroissantes), nous allons effectuer maintenant une partition qui engendre l'équation fondamentale :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \begin{pmatrix} \dagger_{11} & \dagger_{12} \\ \dagger_{21} & \dagger_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III.53})$$

où  $\dagger_{11} = [p_{ij}]$ ,  $i, j = 1, \dots, l^*$  est la matrice des probabilités de transition entre les états forts globalement lents et  $\dagger_{22} = [p_{ij}]$ ,  $i, j = l^* + 1, \dots, r$  représente la matrice des probabilités de transition entre les états faibles-rapides.

### V.3. Réduction de la chaîne de Markov

L'équation fondamentale (III.53) d'une chaîne ergodique peut s'écrire à l'aide de la décomposition du vecteur des probabilités d'états, en deux parties correspondant aux sous-matrices de transition mises en évidence :

$$[\mathbf{S}^*(n+1) \ \mathbf{W}^*(n+1)] = [\mathbf{S}^*(n) \ \mathbf{W}^*(n)] \begin{pmatrix} \dagger_{11} & \dagger_{12} \\ \dagger_{21} & \dagger_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III.54})$$

avec  $\mathbf{P}(n) = [\mathbf{S}^*(n) \ \mathbf{W}^*(n)]$  où

$\mathbf{S}^*(n) = [S_1(n) \ S_2(n) \ \dots \ S_{l^*}(n)]$  est la distribution des probabilités des états  
forts globalement lents

$\mathbf{W}^*(n) = [W_1(n) \ W_2(n) \ \dots \ W_{r^*}(n)]$  la distribution des probabilités des états  
faibles-rapides ( $r^* = r - l^*$ ),

Avec la notation des influences réciproques des parties  $\mathbf{S}^*$  et  $\mathbf{W}^*$

$$\mathbf{S}^*(n) = \mathbf{S}_s^*(n) \text{ et } \mathbf{W}^*(n) = \mathbf{W}_s^*(n) + \mathbf{W}_w^*(n),$$

l'étude de la partie forte globalement lente donne l'équation contenant seulement les influences de cette partie sur chaque vecteur

$$\begin{cases} \mathbf{S}_s^*(n+1) = \mathbf{S}_s^*(n) \dagger_{11} + \mathbf{W}_s^*(n) \dagger_{21} \\ \mathbf{W}_s^*(n+1) = \mathbf{S}_s^*(n) \dagger_{12} + \mathbf{W}_s^*(n) \dagger_{22} \end{cases}$$

A partir de ce point, le découplage Bennis et les perturbations singulières en continu donnent des résultats satisfaisants. Ces méthodes permettent d'obtenir une matrice réduite stochastique correspondant aux états forts à évolution globalement lente.

Dans le cas de la modélisation Bennis, le système réduit correspond à l'équation fondamentale :

$$\mathbf{S}_s^*(n+1) = \mathbf{S}_s^*(n) \ddagger_s^* \quad (III.55)$$

$$\mathbf{S}_s^*(0) = \frac{\mathbf{S}^*(0)}{\sum_{i=1}^I P_i(0)}$$

avec les conditions initiales  
et

$$\ddagger_s^* = \ddagger_{11} + \ddagger_{12} \left( \mathbf{I} - \ddagger_{22} \right)^{-1} \ddagger_{21}$$

Dans le cas de l'utilisation conjointe des transformations homographiques avec les perturbations singulières en continu, le système (III.55) présente la matrice de transition suivante :

$$\begin{aligned} \ddagger_s^* &= \left( \mathbf{I} + \ddagger_{12} \overline{\ddagger}_{22} \ddagger_{21} \left( \ddagger_{11} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right)^{-1} \left( \ddagger_{11} - \ddagger_{12} \overline{\ddagger}_{22} \ddagger_{21} \left( \ddagger_{11} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right) \\ \overline{\ddagger}_{22} &= \left( \left( \ddagger_{22} - \mathbf{I} \right) - \ddagger_{21} \left( \ddagger_{11} + \mathbf{I} \right)^{-1} \ddagger_{12} \right)^{-1} \end{aligned}$$

La matrice de transition de la partie forte globalement lente de la chaîne de Markov ergodique regroupe l'essentiel des propriétés probabilistes du système initial et sa matrice de transition est stochastique. En effet, les états les plus importants dans l'évolution autant transitoire que permanente du système s'y retrouvent.

## VI. Exemple d'application. Etude de la fiabilité opérationnelle

Les situations dysfonctionnelles sont couramment observées sur les chaînes de fabrication et leurs apparitions perturbent fortement la production. Afin de récupérer le flux de production, des interventions sont parfois menées au prix d'une neutralisation volontaire des sécurités. C'est ainsi que bien souvent, la sécurité peut être opposée à la productivité.

Si l'on envisage d'intégrer la sécurité aux systèmes manufacturiers complexes, dans le sens où elle traite les risques critiques tout en assumant la continuité de la production, elle peut devenir une composante d'amélioration de la productivité. On passe ainsi de la notion de sécurité au concept de *sécurité opérationnelle* qui se définit comme l'aptitude d'une entité à éviter l'occurrence d'une défaillance catastrophique dont les conséquences concernent à la fois le produit fabriqué, les outils de production et les opérateurs.

Des travaux récents [NIE, 92] proposent une formalisation de la sécurité opérationnelle. Le modèle introduit s'inspire de la formalisation de la fiabilité opérationnelle (obtenue en associant à la fiabilité intrinsèque un coefficient d'exploitation du système) et peut être représenté par le schéma suivant :

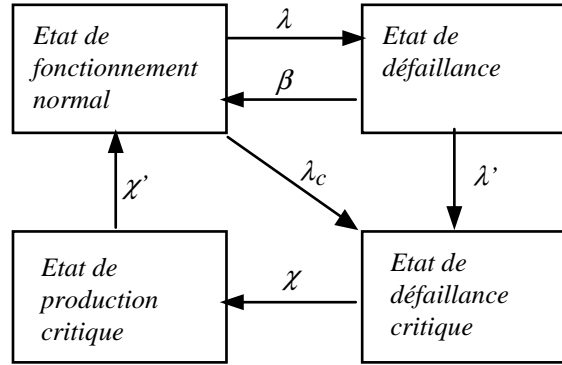


Fig.III.2. Formalisation de la sécurité opérationnelle.

Les taux qui interviennent sont définis comme suit :

- $\lambda$  est le *taux de défaillance* évalué à partir des possibilités de défaillance dans les conditions normales de travail,
- $\beta$  le *taux de réparation*,
- $\lambda_c$  le *taux de défaillance critique* évalué à partir des possibilités de mauvaise exécution d'une tâche, de neutralisation des sécurités, etc ...
- $\chi$  le *taux de récupération*, qui exprime la durée nécessaire pour intégrer un système de commande autorisant la conduite de production sous risques,
- $\lambda'$  le *taux de défaillance propagée* correspondant à une dégradation de la défaillance d'origine,
- $\chi'$  le *taux d'acquiescement* correspondant à la mise en place d'une procédure élaborée de remise en état initial d'un processus qui fonctionne sous contrainte de défaillance critique.

Pour le calcul de la disponibilité critique (probabilité que le système manufacturier soit en service critique à l'instant t), les auteurs proposent une modélisation markovienne de la sécurité opérationnelle. Pour un système de production comprenant un seul élément X (qui peut être une machine, un poste de travail, un centre d'usinage etc.), la chaîne de Markov présente l'aspect suivant :

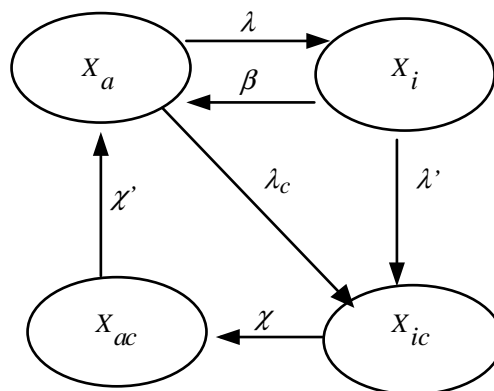


Fig.III.3. Modèle markovien associé à un élément du système manufacturier.

$X_a$  caractérise l'état dans lequel l'élément X est en *service approprié*,

$X_i$  correspond à l'état dans lequel l'élément X a subi une défaillance critique et se trouve alors en

*service inapproprié,*

$X_{ic}$  représente l'état dans lequel l'élément X a subi une défaillance critique et se trouve en *service inapproprié critique*,

$X_{ac}$  caractérise l'état dans lequel l'élément X a subi des réparations lui permettant de reprendre son service. X est en *service approprié critique*.

Dans le cas d'un système manufacturier formé de plusieurs éléments, le modèle markovien associé à l'étude de la fiabilité opérationnelle présente un nombre très grand d'états. Les méthodes de simplification deviennent ainsi indispensables.

Nous nous proposons d'appliquer les différentes techniques de simplification développées sur le modèle markovien correspondant à un système manufacturier formé de deux éléments identiques X et Y.

La chaîne de Markov qui modélise un tel système, présente la formule fondamentale suivante :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathbf{\dagger}$$

avec la matrice de transition :

$$\mathbf{\dagger} = \begin{pmatrix} (1-2\lambda_c) & \lambda & \lambda & 0 & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & (1-\beta\lambda_c-\lambda) & 0 & \lambda & 0 & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & (1-\beta\lambda_c-\lambda_c) & \lambda & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & (1-\beta\lambda_c) & 0 & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda_c-\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & (1-\beta\lambda_c) & \chi & 0 & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi' & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\chi'-\lambda'-\beta) & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\chi'-\lambda) & 0 & 0 & 0 & \chi' & 0 & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda_c-\beta) & 0 & 0 & 0 & \lambda' & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda' & \chi & (1-\lambda'-\chi\beta) & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & (1-\lambda_c-\lambda_c) & 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\chi'-\lambda) & \chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\chi') & \chi' & \chi' \\ \chi' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda_c & 0 & (1-\chi'-\lambda_c) & 0 \\ \chi' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\chi'-\lambda_c) \end{pmatrix}$$

et le graphe associé :



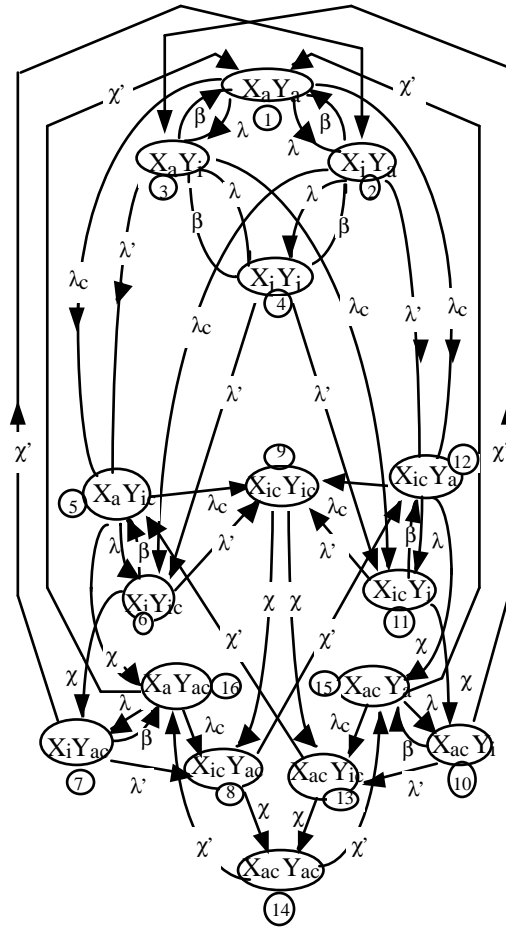


Fig.III.4. Graphe de la chaîne de Markov étudiée.

Le vecteur des probabilités d'état :  $\mathbf{P}(n) = [P_1(n) \ P_2(n) \ \dots \ P_{16}(n)]$  contient les probabilités d'apparition de chaque état du système, selon la numérotation de la figure III.4.

Nous remarquons que la chaîne de Markov obtenue est homogène finie et présente la propriété d'ergodicité.

En fonction de la fiabilité des éléments ( $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda_c$ ) ainsi que la politique de maintenance adoptée ( $\chi$ ,  $\chi'$ ,  $\beta$ ), un tel système présente une évolution différente des probabilités d'état. Nous étudions des différents cas qui correspondent d'une part à l'existence de la propriété de double échelle de temps, d'autre part à la propriété de double échelle de pondération et enfin à l'apparition conjointe des deux propriétés.

### VI.1. Cas où le système présente la double échelle de temps

En considérant les valeurs numériques :  $\lambda = 0.02$ ,  $\lambda_c = 0.008$ ,  $\lambda' = 0.002$ ,  $\chi = 0.45$ ,  $\chi' = 0.1$ ,  $\beta = 0.4$ , nous obtenons la formule fondamentale suivante :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \begin{pmatrix} 0.9440 & 0.0200 & 0.0200 & 0 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 0.5700 & 0 & 0.0200 & 0 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 0 & 0.5700 & 0.0200 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 0.4000 & 0.1960 & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5220 & 0.0200 & 0 & 0 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.1480 & 0.4500 & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4980 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0.4500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4980 & 0 & 0 & 0.0020 & 0 & 0.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0020 & 0.4500 & 0.1480 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0080 & 0 & 0.0200 & 0.5220 & 0 & 0 & 0.4500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 & 0.4500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8000 & 0.1000 & 0.1000 \\ 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0200 & 0 & 0 & 0.0080 & 0 & 0.8720 & 0 \\ 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0200 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8720 \end{pmatrix}$$

Nous considérons les conditions initiales d'évolution du système correspondant à une distribution équiprobable :

$$\mathbf{P}(0) = [1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16]$$

La distribution limite du système ergodique est la suivante :

$$\mathbf{P}(\infty) = [0.7578 \ 0.0377 \ 0.0377 \ 0.0019 \ 0.0136 \ 0.0007 \ 0.0031 \ 0.0011 \ 0.0002 \ 0.0031 \ 0.0007 \ 0.0136 \ 0.0011 \ 0.0050 \ 0.0614 \ 0.0614]$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice de transition donne le spectre :

$$1.0000, 0.7803, \underline{0.1078}, \underline{0.1519}, 0.8901, \underline{0.1299}, 0.8901, \underline{0.1299}, 0.5760, 0.5760, 0.4661, 0.4661, 0.4440, 0.4440, 0.5539, 0.5539$$

L'analyse de ces valeurs propres permet d'identifier deux groupes de valeurs propres : les valeurs propres lentes sont marquées en italique, et les valeurs propres rapides ont été soulignées. Le système présente la propriété de double échelle de temps et par conséquent, nous pouvons lui appliquer les techniques de perturbations singulières développées dans le deuxième chapitre.

Les disques de Gershgorine de la matrice  $\dagger$  présentent la configuration suivante :

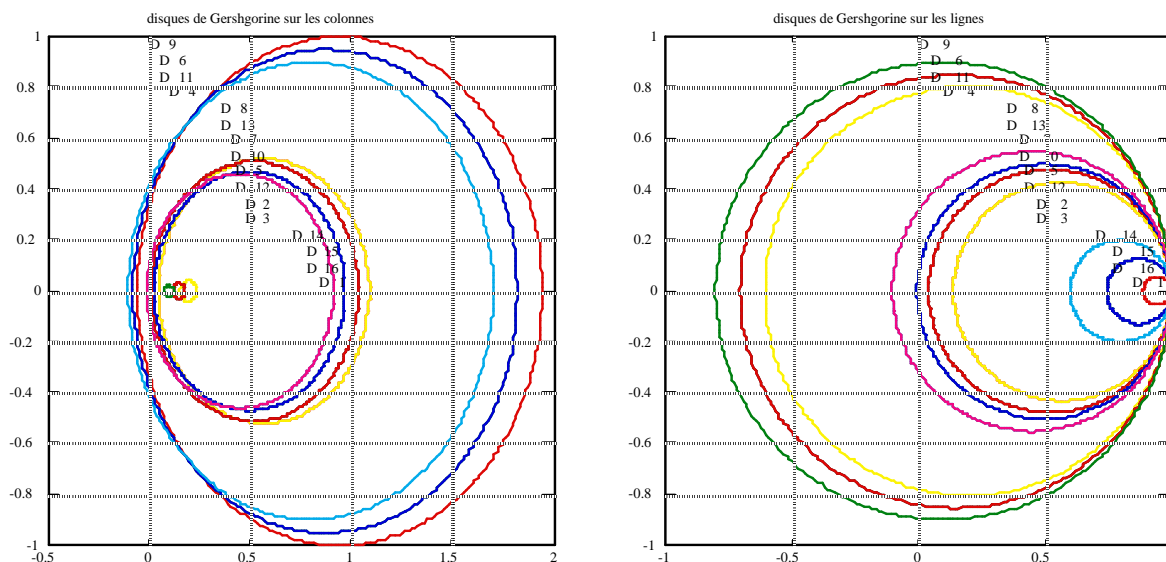


Fig. III.5. Disques de Gershgorine construits sur les lignes de la matrice initiale.

Ce premier tracé n'est pas concluant. Il faut alors procéder à un calibrage de la matrice de transition. Dans ce sens, l'utilisation de la matrice de calibrage suivante (pour les disques construits sur les lignes) :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.0051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0194 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0194 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0736 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0199 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0757 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0181 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0186 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0779 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0181 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0757 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0199 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0186 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0044 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0048 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0048 \end{pmatrix}$$

permet d'obtenir la matrice de transition calibrée :

$$\Phi^{-1} \ddagger \Phi = \begin{pmatrix} 0.9440 & 0.0760 & 0.0760 & 0 & 0.0313 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0313 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1052 & 0.5700 & 0 & 0.0760 & 0 & 0.0313 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1052 & 0 & 0.5700 & 0.0760 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0313 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1052 & 0.1052 & 0.1960 & 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5220 & 0.0760 & 0 & 0 & 0.0313 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1073 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1052 & 0.1480 & 0.1073 & 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4980 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1052 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 & 0 & 0 & 0 & 0.1073 & 0 & 0.1073 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1073 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4980 & 0 & 0 & 0.0021 & 0 & 0.1052 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0021 & 0.1073 & 0.1480 & 0.1052 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0313 & 0 & 0.0760 & 0.5220 & 0 & 0 & 0.1073 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 & 0.1073 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8000 & 0.1073 & 0.1073 \\ 0.1073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0760 & 0 & 0 & 0.0313 & 0 & 0.8720 & 0 & 0 \\ 0.1073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0760 & 0.0313 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8720 \end{pmatrix}$$

Le tracé des disques de Gershgorine sur cette nouvelle matrice, fait apparaître une séparation des domaines et permet aussi d'effectuer un étiquetage des valeurs propres relatives aux différentes probabilités d'état du système. Le système présente 12 probabilités d'état lentes (correspondant aux états 1, 16, 15, 14, 3, 2, 12, 5, 10, 7, 13 et 8) et 4 rapides (états 4, 11, 6 et 9).

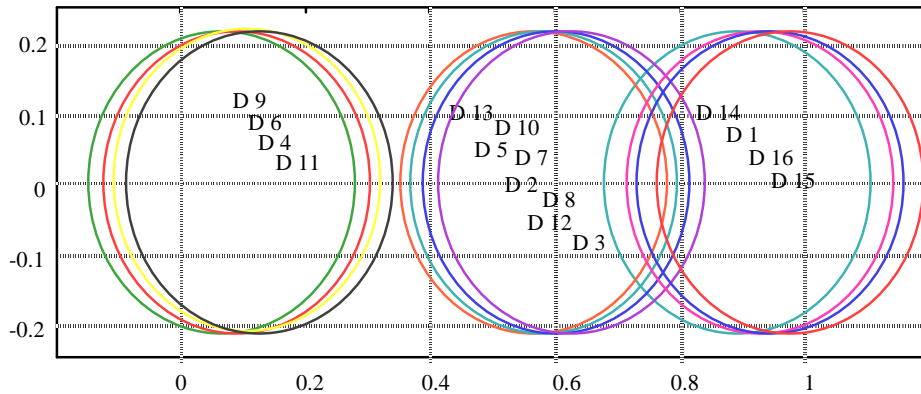


Fig. III.6. Disques de Gershgorine après calibrage de la matrice de transition.

Nous concluons que pour la politique de maintenance appliquée ( $\chi = 0.45$ ,  $\chi' = 0.1$ ,  $\beta = 0.4$ ) sur le système caractérisé par les taux de défaillance  $\lambda = 0.02$ ,  $\lambda_c = 0.008$ ,  $\lambda' = 0.002$ , les états de défaillance simultanée des éléments composants (X et Y) sont maîtrisés. Les probabilités d'apparition de ces états sont stationnaires après un temps d'évolution très court :

$$\text{état 4 (X}_i\text{Y}_i) : P_4(n) \approx 0,0019$$

état 6 ( $X_i Y_{jc}$ ) :  $P_6(n) \approx 0,0007$

état 9 ( $X_{jc}Y_{jc}$ ) :  $P_9(n) \approx 0,0002$ .

état 11 ( $X_{jc}Y_j$ ) :  $P_{11}(n) \approx 0,0007$

L'arrangement de la matrice de transition  $\dagger$  selon les dynamiques du système (permutation  $\{e_1, e_{16}, e_{15}, e_{14}, e_3, e_2, e_{12}, e_5, e_{10}, e_7, e_{13}, e_8, e_4, e_{11}, e_6, e_9\}$ ) induit une partition de la formule fondamentale de la chaîne de Markov :

$$[ \mathbf{L}(n+1) \quad \mathbf{R}(n+1) ] = [ \mathbf{L}(n) \quad \mathbf{R}(n) ] \begin{pmatrix} 0.944 & 0 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.008 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57 & 0 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.008 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 \\ 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.498 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.498 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.196 & 0.002 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.148 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.148 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la norme infinie, nous obtenons le coefficient de découplage suivant :

$$\mu = \frac{\|\dot{\ddagger}_{22}\|}{\|\dot{\ddagger}_{11}\|} = \frac{0,2}{1} = 0,2$$

Sur ce système markovien à double échelle de temps, nous appliquons les différentes techniques de perturbations singulières.

### *a) Application de la technique de Phillips*

La modélisation Phillips appliqué sur l'équation fondamentale de la chaîne de Markov nous donne le découplage suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{L}'_I(n+1) \mathbf{R}'_r(n+1)] = [\mathbf{L}'_I(n) \mathbf{R}'_r(n)] \\ \mathbf{R}'_I(n) = \mathbf{L}'_I(n) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales :

[illegible]

$$\mathbf{R}'_r(0) = \begin{bmatrix} 0.059 & 0.0599 & 0.0599 & 0.061 \end{bmatrix}$$

Après le calibrage, nous obtenons les distributions limites suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1() &= \begin{bmatrix} 0.7545 & 0.0372 & 0.0372 & 0.0135 & 0.0030 & 0.0019 & 0.0030 & 0.0137 & 0.0011 & 0.0067 & 0.0627 & 0.0621 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_1() &= \begin{bmatrix} 0.0018 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0007 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### b) Application de la technique de Bennis

En utilisant les formules du découplage de Bennis, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{L}'_1(n+1) \ \mathbf{R}'_r(n+1)] = [\mathbf{L}'_1(n) \ \mathbf{R}'_r(n)] \begin{pmatrix} 0.9440 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.0080 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8720 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8720 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0.01 & 0.0038 & 0.0020 & 0.0043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.58 & 0.0020 & 0.0038 & 0 & 0.0043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.5314 & 0 & 0.0106 & 0 & 0.0040 & 0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5314 & 0 & 0.0106 & 0.0040 & 0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4980 & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4980 & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.196 & 0.002 & 0.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.148 & 0 & 0.002 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.148 & 0.002 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.002 & 0.002 \end{pmatrix} \\ \\ &\mathbf{R}'_1(n) = \mathbf{L}'_1(n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0249 & 0.0094 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0.0249 & 0.0001 & 0.0094 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0235 & 0 & 0.0089 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0235 & 0.0089 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

avec la matrice de transition de la partie lente présentant la propriété de stochasticité.

Le calcul des solutions lentes et rapides utilise les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_1(0) &= \begin{bmatrix} 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}'_r(0) &= \begin{bmatrix} 0.0594 & 0.0604 & 0.0604 & 0.0614 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La méthode directe et le calibrage des sous-systèmes nous donne les distributions limites suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1() &= \begin{bmatrix} 0.7578 & 0.0377 & 0.0377 & 0.0136 & 0.0031 & 0.0011 & 0.0031 & 0.0136 & 0.0011 & 0.0050 & 0.0614 & 0.0614 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_1() &= \begin{bmatrix} 0.0019 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0007 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### c) Application de la technique El Moudni

La modélisation El Moudni nous donne le découplage suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{L}'_1(n+1) \ \mathbf{R}'_r(n+1)] = [\mathbf{L}'_1(n) \ \mathbf{R}'_r(n)] \begin{pmatrix} 0.944 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.008 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.57 & 0 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.498 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.498 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1671 & -0.0039 & -0.0039 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0035 & 0.1341 & 0.0001 & -0.0041 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0035 & 0.0001 & 0.1341 & -0.0041 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 0.0038 & 0.0038 & 0.103 \end{pmatrix} \\ \\ \mathbf{R}'_1(n) = \mathbf{L}'_1(n) \begin{pmatrix} -0.0015 & -0.0006 & -0.0006 & -0.0003 \\ 0.0003 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0001 \\ -0.0001 & -0 & -0 & -0 \\ 0.0362 & 0.0145 & 0.0003 & 0.0001 \\ 0.0362 & 0.0003 & 0.0145 & 0.0001 \\ -0.0003 & 0.0382 & -0.0001 & 0.0153 \\ -0.0003 & -0.0001 & 0.0382 & 0.0153 \\ -0.0075 & -0.0030 & -0.0002 & -0.0001 \\ -0.0075 & -0.0002 & -0.0030 & -0.0001 \\ 0.0002 & 0.0001 & -0.0085 & -0.0034 \\ 0.0002 & -0.0085 & 0.0001 & -0.0034 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

En appliquant la redondance à la matrice de la partie lente nous obtenons :

$$\dagger'_1 = \begin{pmatrix} 0.944 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.008 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.57 & 0 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0280 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.498 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.498 & 0 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1125 & 0.1125 & 0.1125 & 0.1125 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}$$

Les conditions initiales des systèmes de résolution sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_1(0) &= [0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.0625 \ 0.25] \\ \mathbf{R}'_r(0) &= [0.059 \ 0.0599 \ 0.0599 \ 0.061] \end{aligned}$$

La distribution limite du système lent est :

$$\mathbf{L}_1() = [0.7504 \ 0.0364 \ 0.0364 \ 0.0137 \ 0.0033 \ 0.0016 \ 0.0033 \ 0.0137 \ 0.0016 \ 0.0073 \ 0.0644 \ 0.0644]$$

et la distribution limite du système rapide calibré présente la forme

$$\mathbf{R}_1() = [0.0018 \ 0.0007 \ 0.0002 \ 0.0007]$$

#### d) Utilisation des perturbations singulières en continu

Les transformations homographiques directes font correspondre à la chaîne de Markov étudiée, un processus markovien à temps continu. Les dynamiques du système initial sont conservées, donc nous pouvons écrire une forme partitionnée de l'équation fondamentale du processus de Markov continu :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}} & \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}} & \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.0683 & -0.0027 & -0.0027 & 0 & 0.0266 & 0.0266 & 0.0109 & 0.0109 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0009 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0002 \\ 0.1112 & -0.1426 & 0.0005 & -0.0029 & -0.0014 & -0.0033 & -0.0014 & -0.0006 & 0 & 0.0286 & 0 & 0.0118 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1112 & 0.0005 & -0.1426 & -0.0029 & -0.0033 & -0.0014 & -0.0006 & -0.0014 & 0.0286 & 0 & 0.0118 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0124 & 0.1190 & 0.1190 & -0.2219 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0016 & -0.0016 & -0.0007 & -0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5313 & -0.0001 & 0.0030 & 0 & -0.5652 & -0.0178 & -0.0075 & 0.0006 & -0.0054 & 0 & 0 & 0 & 0.0432 & 0.0179 & 0 & 0 \\ 0.5313 & 0.0030 & -0.0001 & 0 & -0.0178 & -0.5652 & 0.0006 & -0.0075 & 0 & -0.0054 & 0 & 0 & 0.0432 & 0 & 0.0179 & 0 \\ -0.0333 & -0.0004 & 0.6391 & 0.0038 & 0.0019 & 0.0004 & -0.6396 & 0.0008 & -0.0223 & 0 & -0.0094 & -0.0059 & 0 & 0.0460 & 0 & 0.0191 \\ -0.0333 & 0.6391 & -0.0004 & 0.0038 & 0.0004 & 0.0019 & 0.0008 & -0.6396 & 0 & -0.0223 & -0.0059 & -0.0094 & 0 & 0 & 0.0460 & 0.0191 \\ -0.0652 & 0 & 0.5720 & -0.0001 & 0.1721 & 0.0016 & 0.0007 & 0.0001 & -0.6775 & 0 & 0.0005 & 0 & -0.0029 & -0.0012 & 0 & 0 \\ -0.0652 & 0.5720 & 0 & -0.0001 & 0.0016 & 0.1721 & 0.0001 & 0.0007 & 0 & -0.6775 & 0 & 0.0005 & -0.0029 & 0 & -0.0012 & 0 \\ 0.0061 & -0.0810 & -0.0369 & 0.6893 & -0.0001 & -0.0002 & -0.0001 & 0.1820 & 0.0005 & 0.0020 & -0.7580 & 0.0009 & 0 & 0 & -0.0032 & -0.0013 \\ 0.0061 & -0.0369 & -0.0810 & 0.6893 & -0.0002 & -0.0001 & 0.1820 & -0.0001 & 0.0020 & 0.0005 & 0.0009 & -0.7580 & 0 & -0.0032 & 0 & -0.0013 \\ -0.3555 & -0.0002 & -0.0002 & 0 & 0.8640 & 0.8640 & 0.0008 & 0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3734 & -0.0002 & -0.0002 & 0 \\ 0.0372 & 0.0001 & -0.4470 & -0.0003 & -0.0681 & -0.0008 & 0.9196 & -0.0002 & 1.0573 & 0 & 0.0011 & 0.0001 & 0.0012 & -1.4999 & 0 & -0.0003 \\ 0.0372 & -0.4470 & 0.0001 & -0.0003 & -0.0008 & -0.0681 & -0.0002 & 0.9196 & 0 & 1.0573 & 0.0001 & 0.0011 & 0.0012 & 0 & -1.4999 & -0.0003 \\ -0.0050 & 0.0482 & 0.0482 & -0.5640 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0744 & -0.0744 & -0.0010 & -0.0010 & 1.1279 & 1.1279 & 0 & 0.0013 & 0.0013 & -1.6353 \end{pmatrix}$$

L'application des perturbations singulières en continu sur ce système, donne le découplage suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_l & \tilde{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_l & \tilde{\mathbf{R}}_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.0681 & -0.0026 & -0.0026 & 0 & 0.0260 & 0.0260 & 0.0107 & 0.0107 & -0.0001 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1111 & -0.1426 & 0.0005 & -0.0029 & -0.0014 & -0.0032 & -0.0013 & -0.0006 & 0 & 0.0286 & 0 & 0.0118 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1111 & 0.0005 & -0.1426 & -0.0029 & -0.0032 & -0.0014 & -0.0006 & -0.0013 & 0.0286 & 0 & 0.0118 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0123 & 0.1190 & 0.1190 & -0.2219 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0016 & -0.0016 & -0.0007 & -0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5206 & -0.0002 & -0.0024 & 0 & -0.5388 & 0.0094 & 0.0035 & 0.0006 & 0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5206 & -0.0024 & -0.0002 & 0 & 0.0094 & -0.5388 & 0.0006 & 0.0035 & 0 & 0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0322 & 0.6260 & 0.0002 & -0.0028 & 0.0004 & -0.0002 & -0.0001 & -0.6123 & 0 & 0.0101 & 0.0072 & 0.0038 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0322 & 0.6260 & 0.0002 & -0.0028 & 0.0004 & -0.0002 & -0.0001 & -0.6123 & 0 & 0.0101 & 0.0072 & 0.0038 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0644 & 0 & 0.5723 & -0.0001 & 0.1703 & -0.0003 & -0.0001 & 0.0001 & -0.6784 & 0 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0644 & 0.5723 & 0 & -0.0001 & -0.0003 & 0.1703 & 0.0001 & -0.0001 & -0.6784 & 0 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0061 & -0.0801 & -0.0369 & 0.6897 & -0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.1801 & 0.0005 & -0.0002 & -0.7589 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0061 & -0.0369 & -0.0801 & 0.6897 & -0.0001 & -0.0001 & 0.1801 & 0 & -0.0002 & 0.0005 & -0.0001 & -0.7589 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3734 & -0.0002 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0012 & -1.4999 & 0 & -0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0 & -1.4999 & -0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0013 & 0.0013 & -1.6353 & 0 \end{pmatrix}$$

Après le passage en discret (transformations homographiques inverses), nous obtenons le système discret découplé suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_l^{\mathbf{n}} & \mathbf{R}_r^{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_l^{\mathbf{n}} & \mathbf{R}_r^{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.944 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.008 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8720 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0.01 & 0.0038 & 0.002 & 0.0043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.58 & 0.002 & 0.0038 & 0 & 0.0043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0.5314 & 0 & 0.0106 & 0 & 0.004 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5314 & 0 & 0.0106 & 0.004 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4980 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.498 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1858 & -0.0001 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0.1429 & 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.1429 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0.0004 & 0.1003 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_l^{\mathbf{n}}(n) = \mathbf{L}_l^{\mathbf{n}}(n) \begin{pmatrix} -0.0006 & -0.0002 & -0.0002 & -0.0001 \\ 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0315 & 0.0120 & 0 & 0 \\ 0.0315 & 0 & 0.0120 & 0 \\ 0 & 0.0307 & 0 & 0.0117 \\ 0 & 0 & 0.0307 & 0.0117 \\ -0.0021 & -0.0008 & 0 & 0 \\ -0.0021 & 0 & -0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0021 & -0.0008 \\ 0 & -0.0021 & 0 & -0.0008 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_l^{\mathbf{n}}(0) &= \begin{bmatrix} 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 & 0.0625 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_r^{\mathbf{n}}(0) &= \begin{bmatrix} 0.0589 & 0.06 & 0.06 & 0.0611 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les distributions limites sont les suivantes :

$$\mathbf{L}_1^*() = \begin{bmatrix} 0.7578 & 0.0377 & 0.0377 & 0.0136 & 0.0031 & 0.0011 & 0.0031 & 0.0136 & 0.0011 & 0.0050 & 0.0614 & 0.0614 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1^*() = \begin{bmatrix} 0.0019 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0007 \end{bmatrix}$$

Dans les tableaux III.1 et III.2, nous regroupons les résultats obtenus par l'utilisation de toutes les méthodes développées :

		Evolution transitoire (500 transitions étudiées)	Evolution permanente (distributions limites)
Méthode Phillips	Précisions globales	4.3895 %	7.5375 %
	Précision du système lent	1.3911 %	9.5978%
	Précision du système rapide	13.3848 %	1.3565 %
Méthode Bennis	Précisions globales	0.3681 %	0.0870%
	Précision du système lent	0.3061%	$5.411 \cdot 10^{-13}$ %
	Précision du système rapide	0.5541 %	0.3478 %
Méthode El Moudni	Précisions globales	12.4679 %	11.9217 %
	Précision du système lent	14.0693 %	14.7060 %
	Précision du système rapide	7.6638 %	3.5687 %
Perturbations singulières en continu	Précisions globales	0.3488 %	0.0870 %
	Précision du système lent	0.3064 %	$9.4572 \cdot 10^{-13}$ %
	Précision du système rapide	0.4760 %	0.3478 %

Tab. III.1. Erreurs globales des différentes approximations.

		$P_1(\infty)$	$P_2(\infty)$	$P_3(\infty)$	$P_4(\infty)$	$P_5(\infty)$	$P_6(\infty)$	$P_7(\infty)$	$P_8(\infty)$
Méthode Phillips	Chaîne de Markov initiale	0.7578	0.0377	0.0377	0.0019	0.0136	0.0007	0.0031	0.0011
	Système lent	0.7545	0.0372	0.0372		0.0135		0.0030	0.0019
	Système rapide				0.0018		0.0007		
	Précision des approximations	0.437%	1.299%	1.284%	1.512%	1.00%	1.326%	1.864%	69.78%
Méthode Bennis	Système lent	0.7578	0.0377	0.0377		0.0136		0.0031	0.0011
	Système rapide				0.0019		0.0007		
	Précision des approximations	0%	0%	0%	0.347%	$10^{-14}$ %	0.347%	$10^{-13}$ %	$10^{-12}$ %
Méthode El Moudni	Système lent	0.7504	0.0364	0.0364		0.0137		0.0033	0.0016
	Système rapide				0.0018		0.0007		
	Précision des approximations	0.97%	3.34%	3.34%	6.46%	0.76%	3.64%	8.23%	47.04%
Perturbations singulières en continu	Système lent	0.7578	0.0377	0.0377		0.0136		0.0031	0.0011
	Système rapide				0.0019		0.0007		
	Précision des approximations	$10^{-14}$ %	$10^{-14}$ %	$10^{-14}$ %	0.347%	$10^{-14}$ %	0.347%	$10^{-13}$ %	$10^{-12}$ %

		$P_9(\infty)$	$P_{10}(\infty)$	$P_{11}(\infty)$	$P_{12}(\infty)$	$P_{13}(\infty)$	$P_{14}(\infty)$	$P_{15}(\infty)$	$P_{16}(\infty)$
Méthode Phillips	Chaîne de Markov initiale	0.0002	0.0031	0.0007	0.0136	0.0011	0.0050	0.0614	0.0614
	Système lent		0.0030		0.0137	0.0011	0.0067	0.0627	0.0621
	Système rapide	0.0002		0.0007					



	Précision des approximations	1.192%	1.034%	1.394%	0.178%	0.052%	34.91%	2.188%	1.138%
Méthode Bennis	Système lent		0.0031		0.0136	0.0011	0.0050	0.0614	0.0614
	Système rapide	0.0002		0.0007					
	Précision des approximations	0.347%	10 <sup>-13</sup> %	0.347%	10 <sup>-14</sup> %	10 <sup>-12</sup> %	10 <sup>-13</sup> %	10 <sup>-14</sup> %	10 <sup>-13</sup> %
Méthode El Moudni	Système lent		0.0033		0.0137	0.0016	0.0073	0.0644	0.0644
	Système rapide	0.0002		0.0007					
	Précision des approximations	0.522%	8.231%	3.643%	0.76%	47.04%	47.04%	4.853%	4.853%
Perturbations singulières en continu	Système lent		0.0031		0.0136	0.0011	0.0050	0.0614	0.0614
	Système rapide	0.0002		0.0007					
	Précision des approximations	0.347%	10 <sup>-13</sup> %	0.347%	10 <sup>-14</sup> %	10 <sup>-12</sup> %	10 <sup>-12</sup> %	10 <sup>-13</sup> %	10 <sup>-13</sup> %

Tab. III.2. Comparaison des résolutions limites correspondant aux différents découplages proposés.

Nous remarquons que les résultats de l'étude développée dans le deuxième chapitre se confirment : les découplages qui donnent les meilleurs résultats sont celui de Bennis en discret et le découplage en continu par le biais des transformations homographiques.

## VI.2. Cas où le système présente la double échelle de pondération

En considérant les valeurs numériques :  $\lambda = 0.04$  (le taux de panne),  $\lambda_c = 0.01$  (taux de panne critique),  $\lambda' = 0.01$  (taux de défaillance propagée),  $\chi = 0.01$  (taux de récupération) et  $\chi' = 0.01$  (taux d'acquiescement),  $\beta = 0.1$  (taux de réparation), nous obtenons une chaîne de Markov qui présente l'équation fondamentale suivante :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.04 & 0.04 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.84 & 0 & 0.04 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0 & 0.84 & 0.04 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0.10 & 0.78 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0.04 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.88 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.88 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.98 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.88 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.88 & 0.10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.04 & 0.94 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.94 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 \end{pmatrix}$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{P}(0) = [1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16 \ 1/16].$$

La forme propre associée à la valeur propre 1 de la matrice de transition du système, est la suivante :

$$\mathbf{f}_1 = [0.239 \ 0.0869 \ 0.0869 \ 0.0316 \ 0.32592 \ 0.1185 \ 0.11852 \ 0.44444 \ 0.44444 \ 0.11851 \ 0.11851 \ 0.326 \ 0.44445 \ 0.44445 \ 0.32594 \ 0.32593]$$

et nous donne une indication sur l'existence de la propriété de double échelle de pondération. Le système présente

$$\mu_p = \frac{0,11852}{0,239} = 0,4$$

Le système présente 9 états forts ( $e_{14}$ ,  $e_{13}$ ,  $e_8$ ,  $e_9$ ,  $e_{12}$ ,  $e_{15}$ ,  $e_{16}$ ,  $e_5$  et  $e_1$ ) et 7 états faibles ( $e_7$ ,  $e_{11}$ ,  $e_{10}$ ,  $e_6$ ,  $e_3$ ,  $e_2$  et  $e_4$ ) et le découplage en régime permanent peut être appliqué.

La double échelle de pondération détectée de façon analytique est visible aussi sur le graphe d'évolution des probabilités d'état du système :

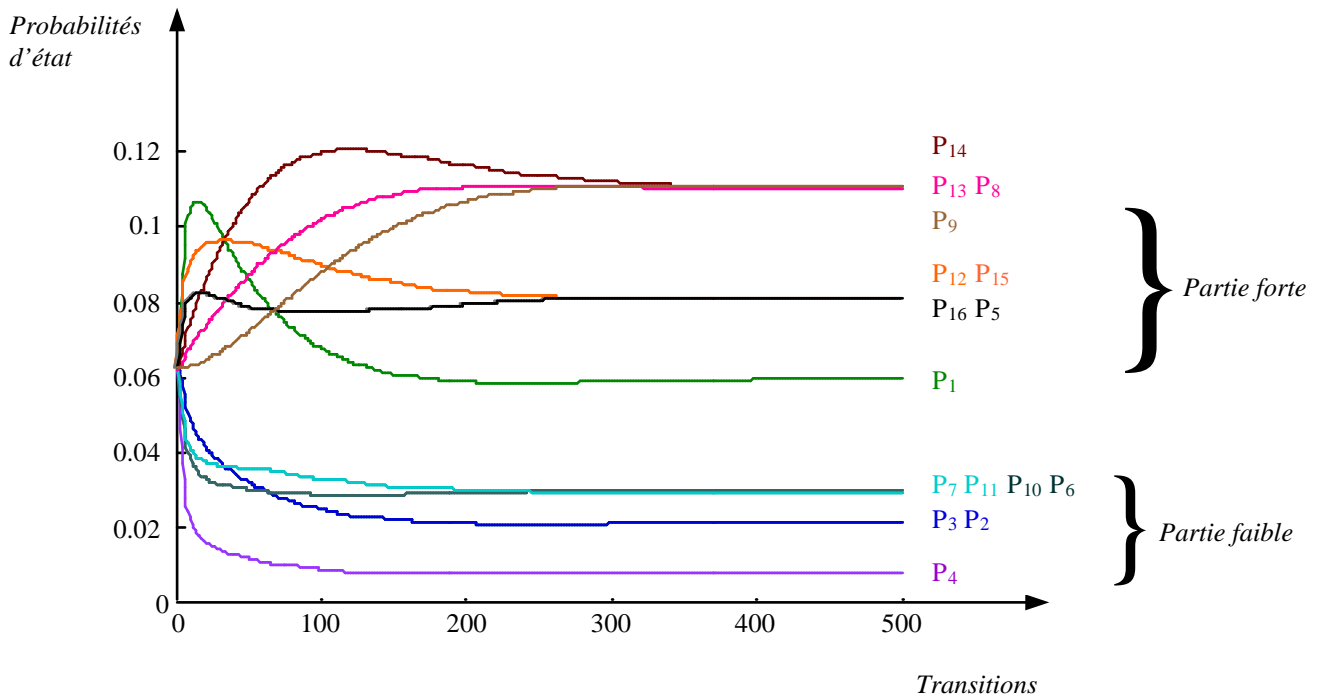


Fig.III.7. Evolution des probabilités d'état de la chaîne de Markov à double échelle de pondération.

Nous remarquons que dans ces conditions de maintenance ( $\chi = 0.01$ ,  $\chi' = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ) et de fiabilité ( $\lambda = 0.04$ ,  $\lambda_c = 0.01$ ,  $\lambda' = 0.01$ ), le système est caractérisé par des faibles probabilités d'apparition des défaillances ordinaires ( $X_i$  respectivement  $Y_i$ ).

La permutation nécessaire pour arranger la forme propre dans l'ordre décroissant des modules des éléments, est la suivante :

$$\{ 14 \ 13 \ 8 \ 9 \ 12 \ 15 \ 16 \ 5 \ 1 \ 7 \ 11 \ 10 \ 6 \ 3 \ 2 \ 4 \}$$

Cette permutation donne un arrangement de la forme propre :

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0.444445 & 0.444445 & 0.444444 & 0.444444 & 0.326 & 0.32594 & 0.32593 & 0.32592 & 0.239 & 0.11852 & 0.11851 & 0.11851 & 0.11850 & 0.0869 & 0.0869 & 0.0316 \end{bmatrix}$$

obtenue suite à l'arrangement de la matrice de transition, avec la partition donnée par la double échelle de pondération :

$$[S(n+1) \ W(n+1)] = [S(n) \ W(n)] \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0.98 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.94 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0.01 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.01 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.01 & 0.90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.04 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.88 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.88 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.88 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.10 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.84 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.84 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.1 & 0.10 & 0.78 & 0 \end{pmatrix}$$

Le découplage en régime permanent nous permet de déterminer les matrices de transition stochastiques des parties forte et faible. Les équations fondamentales correspondant aux deux systèmes découplés prennent la forme suivante :

- partie forte :

$$S_s(n+1) = S_s(n) \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0.98 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 & 0.0133 & 0.9734 & 0.0128 & 0 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0.0133 & 0 & 0 & 0.0003 & 0.9734 & 0 & 0.0003 & 0.0127 \\ 0 & 0 & 0.0133 & 0 & 0.0003 & 0 & 0.9734 & 0.0003 & 0.0127 \\ 0 & 0 & 0.0003 & 0.0133 & 0 & 0 & 0.0128 & 0.9734 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0007 & 0.0169 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0169 & 0.9648 \end{pmatrix}$$

de conditions initiales

$$S_s(0) = [0.092 \ 0.092 \ 0.092 \ 0.092 \ 0.092 \ 0.092 \ 0.092 \ 0.092 \ 0.092] , (\alpha_s = 1.4758),$$

- partie faible :

$$W_w(n+1) = W_w(n) \begin{pmatrix} 0.9527 & 0.0113 & 0.0075 & 0.0025 & 0.008 & 0.018 & 0 \\ 0.0072 & 0.9527 & 0.0282 & 0.0069 & 0.0025 & 0.0025 & 0 \\ 0.0075 & 0.0025 & 0.9527 & 0.0113 & 0.018 & 0.008 & 0 \\ 0.0282 & 0.0069 & 0.0072 & 0.9527 & 0.0025 & 0.0025 & 0 \\ 0.0036 & 0.018 & 0.0025 & 0.0146 & 0.8806 & 0.0406 & 0.04 \\ 0.0025 & 0.0146 & 0.0036 & 0.018 & 0.0406 & 0.8806 & 0.04 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.1 & 0.1 & 0.78 \end{pmatrix}$$

avec les conditions initiales  $W_w(0) = [0.024 \ 0.024 \ 0.024 \ 0.024 \ 0.024 \ 0.024 \ 0.024] , (\alpha_w = 0.38825)$ .

L'évolution des probabilités du système initial (ligne continue) et des systèmes fort et faible découplés (ligne interrompue) est représentée dans la figure suivante :

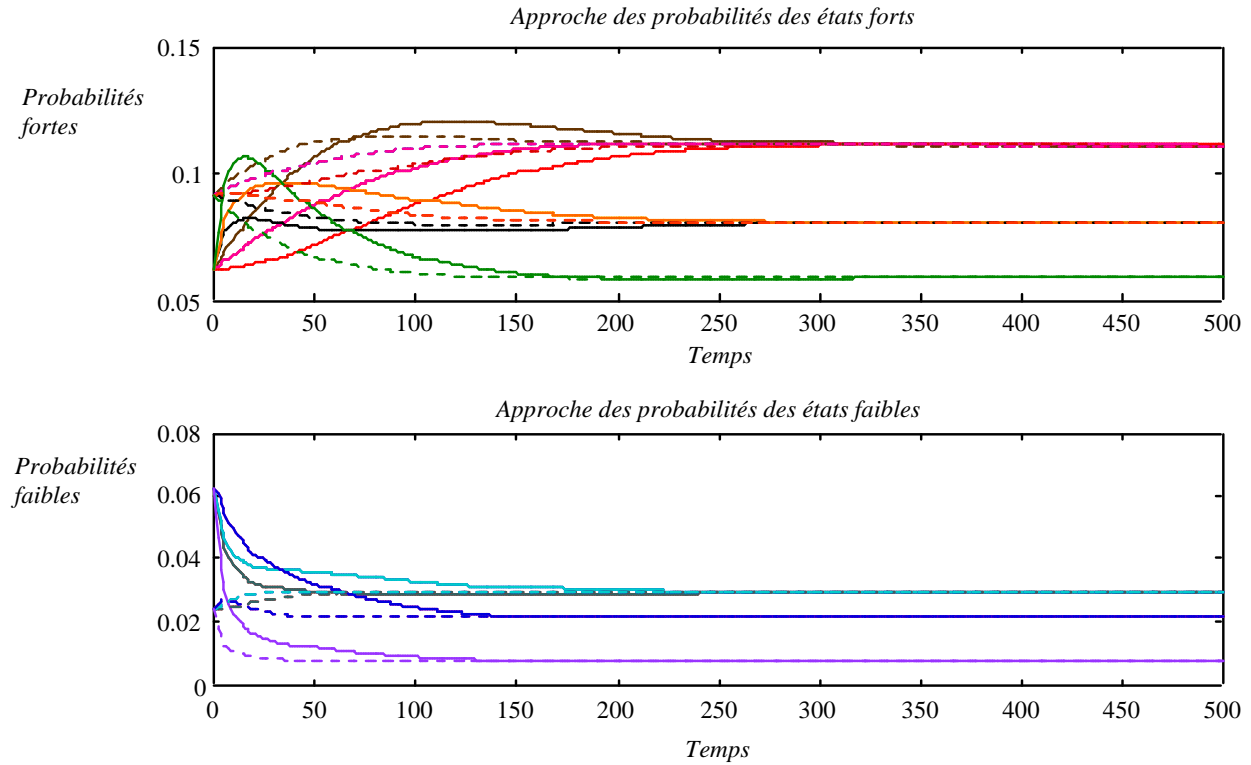


Fig. III.8. Approximation donnée par les systèmes fort et faible réduits.

( - système initial ; - - système réduit )

L'erreur moyenne d'approximation des probabilités limites est de  $4,9 \cdot 10^{-13}\%$  pour tout le système, avec  $2 \cdot 10^{-13}\%$  d'erreur pour la partie forte et  $8,55 \cdot 10^{-13}\%$  pour la partie faible.

### VI.3. Cas où le système présente la double échelle de temps et la double échelle de pondération

Dans le même exemple d'étude de la fiabilité opérationnelle, les paramètres :

$$\lambda = 0.1, \lambda_c = 0.08, \lambda' = 0.002, \chi = 0.32, \chi' = 0.15, \beta = 0.44,$$

nous donne une chaîne de Markov avec la formule fondamentale suivante :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \begin{pmatrix} 0,64 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,44 & 0,378 & 0 & 0,1 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,44 & 0 & 0,378 & 0,1 & 0,002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,44 & 0,44 & 0,116 & 0 & 0,002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,1 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0,238 & 0,32 & 0 & 0,002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,44 \\ 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,408 & 0,002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,53 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0,32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,32 & 0,36 & 0 & 0 & 0 & 0,32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,408 & 0 & 0 & 0,002 & 0 & 0,44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0,32 & 0,238 & 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0,1 & 0,5 & 0 & 0 & 0,32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,53 & 0,32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,15 & 0,15 \\ 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0,67 & 0 \\ 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 \end{pmatrix}$$

Le graphe d'évolution des probabilités d'état de ce système prend la forme suivante :

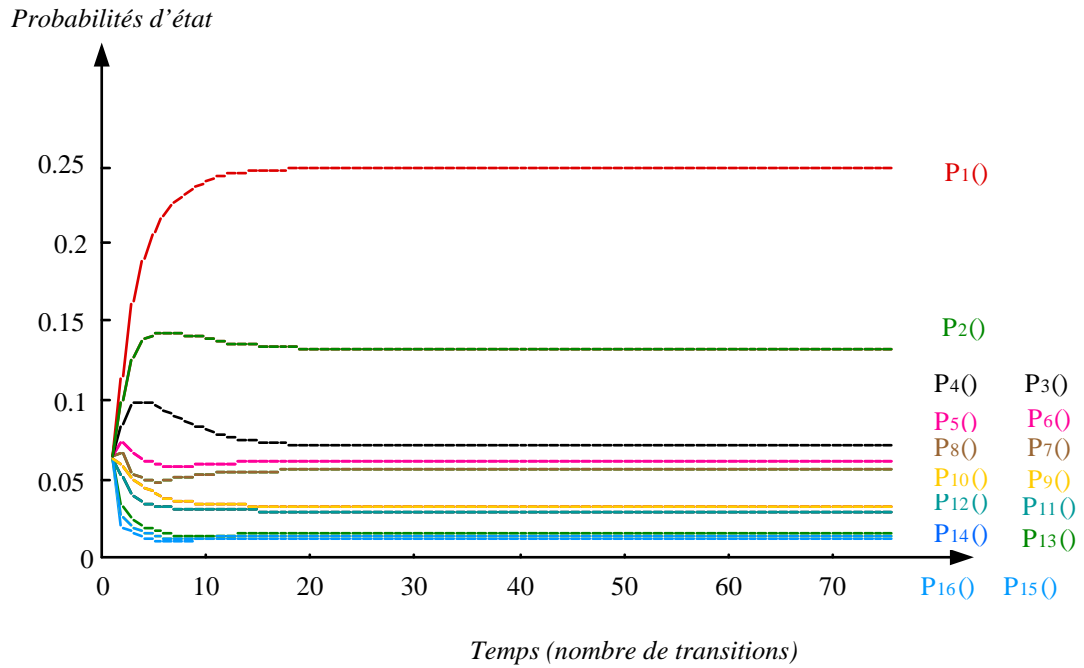


Fig.III.9. Evolution des probabilités d'état du système.

Nous pouvons arranger la matrice de transition du système en ordre décroissante des pondérations des états, en utilisant la permutation

$$\{ 1 \ 15 \ 16 \ 14 \ 5 \ 12 \ 3 \ 2 \ 8 \ 13 \ 10 \ 7 \ 9 \ 6 \ 11 \ 4 \}$$

donnée par l'arrangement des modules de la forme propre correspondant à la valeur propre 1

$$\mathbf{f}_1 = [ 0,9861 \ 0,2231 \ 0,2231 \ 0,0505 \ 0,2479 \ 0,0561 \ 0,1197 \ 0,1330 \ 0,0623 \ 0,1197 \ 0,0561 \ 0,2479 \ 0,1330 \ 0,2837 \ 0,5289 \ 0,5289 ]$$

Après cette permutation, la matrice de transition arrangée prend la forme suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,64 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0,08 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,15 & 0,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,15 & 0 & 0,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,15 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,32 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,32 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 & 0,378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0,1 \\ 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 & 0,378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,32 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,32 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,002 & 0,408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0,002 & 0 & 0 & 0,408 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,32 & 0,32 & 0 & 0 & 0,36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,32 & 0,002 & 0,238 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,32 & 0 & 0,002 & 0 & 0,238 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0,002 & 0,116 & 0 \end{pmatrix}$$

avec la forme propre correspondante :

$$\mathbf{f}_1 = [ 0,9861 \ 0,5289 \ 0,5289 \ 0,2837 \ 0,2479 \ 0,2479 \ 0,2231 \ 0,2231 \ 0,1330 \ 0,1330 \ 0,1197 \ 0,1197 \ 0,0623 \ 0,0561 \ 0,0561 \ 0,0505 ]$$

Dans le vecteur  $\mathbf{f}_1$  nous remarquons l'existence de la double échelle de pondération contenant **12** états forts ( $e_1, e_{15}, e_{16}, e_{14}, e_5, e_{12}, e_3, e_2, e_8, e_{13}, e_{10}, e_7$ ) et 4 états faibles ( $e_9, e_6, e_{11}, e_4$ ) Le coefficient de séparation des pondérations est de  $\mu_p = \frac{0,0561}{0,0623} = 0,9$ . Nous remarquons que la séparation n'est pas très marquée. Par conséquent, une réduction uniquement à la partie forte du système pourrait impliquer une perte importante d'informations.

D'une autre part, les valeurs propres de la matrice de transition sont :

1  
 $0,7286 + 0,0644i$   
 $0,7286 - 0,0644i$   
 $0,7286 + 0,0644i$   
 $0,7286 - 0,0644i$   
 $0,4573 + 0,1289i$   
 $0,4573 - 0,1289i$   
 $0,4573$   
 $0,4507$   
 $0,4573$   
 $0,4507$

et

$0,1794 + 0,0644i$   
 $0,1794 - 0,0644i$   
 $0,1794 + 0,0644i$   
 $0,1794 - 0,0644i$   
 $- 0,0985$

Le système présente la propriété de double échelle de temps (11 valeurs propres grandes). Le coefficient de découplage des dynamiques est  $\mu = \frac{0,1906}{0,4507} = 0,423$ . Nous allons retenir la matrice modale dominante formée par les 11 formes propres correspondantes :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0,169 & -0,1164 & 0,2532 & 0,0248 & 0,4083 & -0,4234 & 0,7539 & -0,8732 & -0,1862 & 0,1669 & 0,3575 & -0,4316 & -0,0145 & -0,1368 & 0,0841 & -0,0356 \\ -1,3084 & -0,6356 & -0,4236 & -0,1917 & 0,2971 & -0,1801 & 0,9287 & -0,0048 & -0,0266 & 0,176 & 0,5131 & 0,0604 & 0,1121 & 0,1404 & 0,2672 & 0,276 \\ 0,1187 & 0,3529 & -0,8546 & 0,6484 & 0,5579 & -0,4152 & 0,1781 & -0,0563 & 0,4198 & -0,9116 & -0,0897 & -0,2135 & 0,1196 & 0,2342 & -0,1241 & 0,0357 \\ 1,9364 & -4,4174 & -3,7685 & 10,579 & 0,9019 & 1,4248 & 0,9302 & 1,0562 & -4,3702 & -3,6548 & -2,5069 & -2,4403 & 1,9508 & 0,802 & 0,9946 & 0,5821 \\ 1,023 & -2,0191 & -2,0191 & 2,9467 & 0,4992 & 0,4992 & 0,4969 & 0,4969 & -0,1485 & -0,1485 & -0,7792 & -0,7792 & -0,4307 & 0,08 & 0,08 & 0,2022 \\ 1,023 & -2,0191 & -2,0191 & 2,9467 & 0,4992 & 0,4992 & 0,4969 & 0,4969 & -0,1485 & -0,1485 & -0,7792 & -0,7792 & -0,4307 & 0,08 & 0,08 & 0,2022 \\ -1,0053 & 1,3312 & 1,321 & 1,7117 & -0,8027 & -0,9135 & -0,4675 & -0,4826 & -0,0223 & 0,0397 & 0,1724 & 0,162 & -0,3679 & -0,2458 & -0,267 & -0,1635 \\ -1,0053 & 1,3312 & 1,321 & 1,7117 & -0,8027 & -0,9135 & -0,4675 & -0,4826 & -0,0223 & 0,0397 & 0,1724 & 0,162 & -0,3679 & -0,2458 & -0,267 & -0,1635 \\ -0,1148 & 1,3516 & -1,1205 & 0,1569 & 0,5544 & -0,6925 & 0,1452 & -0,2397 & -0,6376 & 0,6526 & 0,3976 & -0,3682 & -0,0275 & 0,0717 & -0,1136 & -0,0155 \\ -0,1148 & 1,3516 & -1,1205 & 0,1569 & 0,5544 & -0,6925 & 0,1452 & -0,2397 & -0,6376 & 0,6526 & 0,3976 & -0,3682 & -0,0275 & 0,0717 & -0,1136 & -0,0155 \\ 0,9861 & 0,5289 & 0,5289 & 0,2837 & 0,2479 & 0,2479 & 0,2231 & 0,2231 & 0,133 & 0,133 & 0,1197 & 0,1197 & 0,0623 & 0,0561 & 0,0561 & 0,0505 \end{pmatrix}$$

Suite à une élimination Gaussienne avec pivot simple, nous obtenons la matrice de permutation :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui nous indique que les colonnes 2, 3, 4, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et **13** de la matrice modale

dominante sont les 11 colonnes les plus indépendantes. Les états correspondant à ces colonnes seront donc (avec les notations du système initial avant la permutation selon les pondérations) :

$$e_{15}, e_{16}, e_{14}, e_1, e_5, e_{12}, e_3, e_2, e_8, e_{13}, e_9$$

et représenterons les états lents du système.

La dimension du système réduit se définit comme étant :  $l^* = \max\{\text{nombre d'états forts, ordre maximal des états faibles}\} = \max\{\mathbf{12}, \mathbf{13}\} = 13$ . Après la réduction (selon Bennis) de la matrice de transition, la formule fondamentale du système réduit ayant 13 états, prend la forme suivante :

$$\mathbf{S}_s^*(n+1) = \mathbf{S}_s^*(n) \mathbf{\dagger}_s^*$$

avec la matrice stochastique :

$$\mathbf{\dagger}_s^* = \begin{pmatrix} 0.64 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.08 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.15 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.32 & 0 & 0.5577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.042 & 0.0803 \\ 0 & 0.32 & 0 & 0 & 0 & 0.5577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.042 & 0 & 0.0803 \\ 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0.0021 & 0.0463 & 0.4278 & 0.0498 & 0 & 0 & 0.0337 & 0.0001 & 0.0002 \\ 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0.0463 & 0.0021 & 0.0498 & 0.4278 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0337 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.32 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0.53 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.32 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.53 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0.002 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.002 & 0 & 0 & 0.408 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32 & 0.32 & 0 & 0 & 0.36 \end{pmatrix}$$

et les conditions initiales :

$$\mathbf{S}^*(0) = [0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923 \ 0,076923]$$

Nous concluons que pour la politique de maintenance adoptée, les états 4 ( $X_i Y_i$ ), 6 ( $X_i Y_{ic}$ ) et 11 ( $X_{ic} Y_i$ ) sont négligeables par rapport au reste du système. Par conséquent, ils peuvent être éliminés. L'évolution du système initial est ainsi approchée par un système d'ordre réduit :

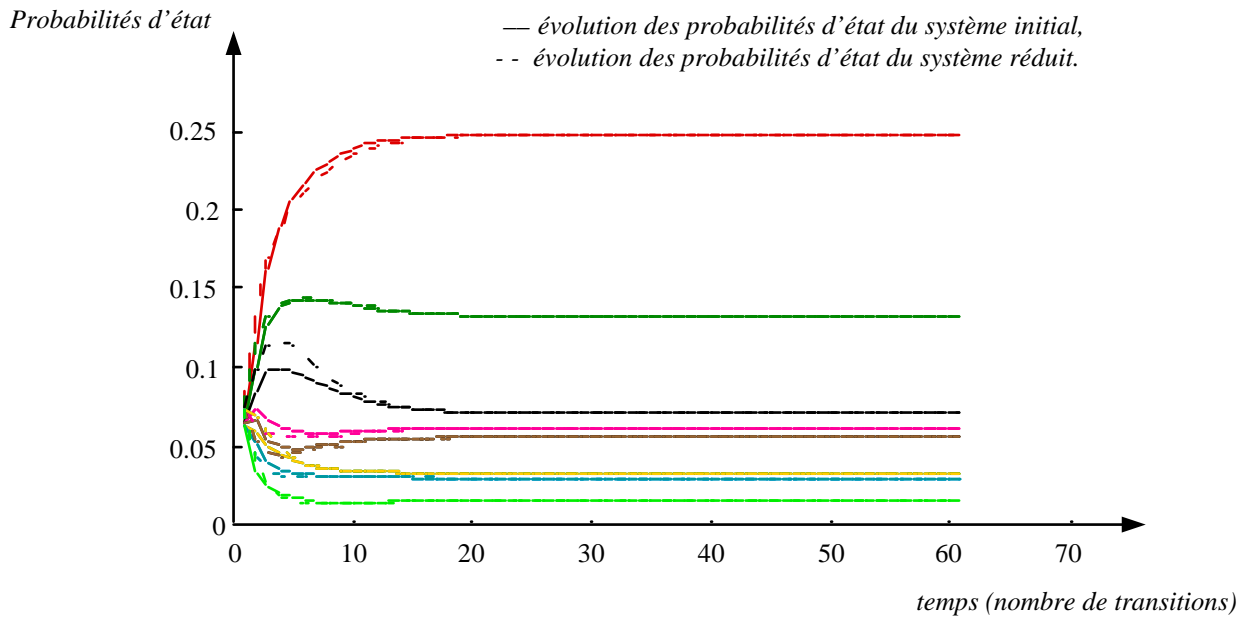


Fig.III.10. Evolution des probabilités d'état du système réduit.

Les erreurs d'approximation de la distribution limite sont les suivantes :

$0,0225 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_1$	$0,0210 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_{15}$
$0,0210 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_{16}$	$0,0587 \cdot 10^{-15} \%$ pour l'état $e_{14}$
$0,0448 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_5$	$0,0112 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_{12}$
$0,0373 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_3$	$0,0746 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_2$
$0,0626 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_8$	$0,0626 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_{13}$
$0,0232 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_{10}$	$0,0928 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_7$
$0,11225 \cdot 10^{-12} \%$ pour l'état $e_9$ .	

## VII. Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode de simplification des chaînes de Markov ergodiques irréductibles, en considérant l'évolution en régime permanent. Cette méthode est basée sur la propriété de double échelle de pondération, correspondant à l'existence d'éléments de différentes grandeurs dans la forme propre associée à la valeur propre 1 de la matrice de transition du système. Le découplage qui s'ensuit donne un premier sous-système qui contient les états à fortes probabilités limites et un deuxième sous-système formé par les états à probabilités limites faibles. Les sous-systèmes fort et faible sont stochastiques et peuvent être résolus indépendamment.

L'utilisation conjointe de la double échelle de pondération et la double échelle de temps pour la réduction des chaînes de Markov ergodiques a fait l'objet de la deuxième partie du chapitre. Nous avons ainsi développé une méthode de réduction qui garde les états les plus significatifs du système, autant en régime transitoire (les états lents) qu'en régime permanent (les



états forts). Le système réduit représente une chaîne de Markov indépendante.

Les chaînes de Markov qui modélisent les systèmes aléatoires où des décisions doivent être prises ont généralement un paramètre de commande. Le chapitre suivant présente une extension des méthodes de simplification développées jusqu'à présent pour les chaînes de Markov à commande.