

CHAPITRE I

***ELEMENTS DE BASE DES CHAINES DE
MARKOV ET DES DIFFERENTES
METHODES DE PERTURBATIONS
SINGULIERES***

I. Introduction

Un grand nombre de problèmes réels conduisent à des modélisations ayant une évolution imprévisible dans le temps. Vu le nombre important et la diversité des facteurs d'influence qui interviennent dans la description des systèmes, l'utilisation des modèles déterministes s'avère insuffisante. Par conséquent, la modélisation et l'estimation des performances de ce type de systèmes nécessitent l'introduction de la notion de probabilité.

C'est en étudiant l'alternance des voyelles et des consonnes dans l'oeuvre bien connue de Pouchkine " Eugène Oneguine" que le mathématicien russe Markov crée, au début du siècle, le modèle aléatoire qui porte son nom. En évaluant les probabilités d'apparition de chaque lettre en fonction des lettres précédentes, il définit la "propriété de Markov" : le passé d'un système markovien influence l'évolution aléatoire future uniquement par l'intermédiaire d'une collection restreinte de grandeurs.

Les chaînes de Markov occupent une place importante parmi les modèles aléatoires discrets. Elles sont utilisées pour l'étude de nombreux systèmes : étude des files d'attente, détection de pannes, politique publicitaire, marketing, mouvement brownien, taille d'une population, nucléaire, etc... . Mis à part ces applications, les chaînes de Markov s'adaptent facilement à la représentation et à l'étude des systèmes stochastiques définis de façon qualitative (processus économiques, sociaux, stratégiques, ...).

Dans de nombreuses situations pratiques, l'utilisation des chaînes de Markov se trouve limitée suite à la grande dimension du modèle. Cet inconvénient a été générateur de nombreux travaux de recherche concernant les méthodes de simplification [PHP, 81], [KUS, 74], [DEL, 81, 83].

Dans une première partie de ce chapitre, nous situons les chaînes de Markov dans l'ensemble des processus stochastiques et nous présentons leurs éléments de base. La deuxième partie du chapitre présente les méthodes de perturbations singulières pour la simplification des systèmes discrets et continus. Ceci nous permet par la suite de les adapter à la simplification des chaînes de Markov.

II. Processus stochastique [CHR, 74], [BAI, 70], [ENG, 79]

Un processus aléatoire (ou processus stochastique) est un phénomène dont l'évolution temporelle ne peut pas être déterminée de façon certaine :

On appelle *processus stochastique* une suite d'expériences ayant comme résultat des variables aléatoires ξ indexées par un paramètre représentant le temps (t pour le temps continu, et n pour le temps discret) :

$$\{\xi_t / t \in \mathcal{T}, \mathcal{T} = [a, b] \text{ à } [0, +\infty[\} \text{ respectivement } \{\xi_n / n \in \mathcal{T}, \mathcal{T} \subset \mathbb{N}\}. \quad (\text{I.1})$$

Lorsque l'ensemble \mathcal{T} est discret, les variables aléatoires ξ_n forment un *processus stochastique récurrent*. Lorsque \mathcal{T} est un ensemble continu, les variables aléatoires ξ_t forment un *processus stochastique continu*.

Les variables ξ_n et ξ_t prennent leurs valeurs dans un ensemble E formé par tous les états possibles du système. L'ensemble E porte le nom d'*espace d'état*. Indépendamment de l'ensemble \mathcal{T} , l'espace d'état E peut être discret ou continu. Nous pouvons alors distinguer quatre types de processus stochastiques, comme le montre le tableau suivant :

$\begin{matrix} T \\ E \end{matrix}$	$T \text{ discret}$	$T \text{ continu}$
$E \text{ discret}$	<i>Processus stochastique récurrent à espace d'état discret</i>	<i>Processus stochastique continu à espace d'état discret</i>
$E \text{ continu}$	<i>Processus stochastique récurrent à espace d'état continu</i>	<i>Processus stochastique continu à espace d'état continu</i>

Tableau I.1. Types de processus stochastiques.

Les processus stochastiques les plus rencontrés sont les processus markoviens et les processus pseudo-markoviens. Un processus stochastique est *markovien* si la seule connaissance de son état présent suffit pour déterminer son évolution future. Cette propriété s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{en discret sous forme d'une suite markovienne} \\ \text{Prob}\{\xi_{n+1} = j / \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} &= \text{Prob}\{\xi_{n+1} = j / \xi_n\}, \quad \forall n \in \mathcal{T}, \mathcal{T} \subset \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

$$\begin{aligned} &\text{et en continu sous forme d'un processus markovien continu} \\ \text{Prob}\{\xi_{t+dt} = j / \xi_i, i \in [0, t]\} &= \text{Prob}\{\xi_{t+dt} = j / \xi_t\}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \text{ à } [0, +\infty[. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Les *processus semi-markoviens* représentent les processus dans lesquels le comportement dépend de plusieurs états précédents. Ils peuvent être écrits :

$$\begin{aligned} &\text{en discret} \\ \forall n \in \mathcal{T} \subset \mathbb{N}, \forall v \in \mathcal{T}, 0 < v \leq n, \text{ tel que :} \end{aligned}$$

$$\text{Prob}\{\xi_{n+1} = j / \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} = \text{Prob}\{\xi_{n+1} = j / \xi_v, \dots, \xi_n\} ; \quad (\text{I.4})$$

et en continu

À $t \in \mathcal{T} \cap [0, +\infty[$, É $v \in \mathcal{T}$, $0 < v \leq t$, tel que :

$$\text{Prob}\{\xi_{t+dt} = j / \xi_i, i \in [0, t]\} = \text{Prob}\{\xi_{t+dt} = j / \xi_i, i \in [v, t]\} \quad (\text{I.5})$$

Autrement dit, dans l'évolution d'un processus semi-markovien, nous pouvons retrouver certains points de régénération $v \in \mathcal{T}$, à partir desquels le comportement ne dépend plus du passé (c'est le cas par exemple, des processus de renouvellement des équipements). L'étude des processus semi-markoviens peut ainsi être réduite à l'étude de plusieurs processus markoviens.

II.1. Chaînes de Markov : éléments de base [CHR, 74] [ENG, 79]

Le processus stochastique markovien récurrent à espace d'état discret porte le nom de *chaîne de Markov*. Notre étude concerne les *chaînes de Markov à espace d'état fini*, qu'on va appeler dans la suite de notre mémoire : "chaînes de Markov finies".

Considérons un ensemble *fini* d'états (ou événements) d'un système, deux à deux exclusifs $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$, et une suite d'épreuves consécutives telles que la variable aléatoire ξ_n correspondant à la n -ième épreuve ($n = 0, 1, 2, \dots$) prenne la valeur i si l'état e_i est apparu comme résultat de cette épreuve. Nous considérons le résultat d'une épreuve comme étant indépendant des résultats des épreuves précédentes.

II.1.1. Vecteur des probabilités d'état (distribution des états)

Soit $P_i(n)$ la probabilité que le système se trouve dans l'état e_i à l'instant n :

$$P_i(n) = \text{Prob}\{\xi_n = e_i\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ et } i = 1, 2, \dots, r. \quad (\text{I.6})$$

Il nous vient alors le *vecteur des probabilités d'état*, appelé aussi *distribution des états* et correspondant à l'ensemble des états du système à l'instant n :

$$\mathbf{P}(n) = [P_1(n) \ P_2(n) \ \dots \ P_r(n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.7})$$

A l'instant initial 0, le vecteur de probabilité initial s'écrit :

$$\mathbf{P}(0) = [P_1(0) \ P_2(0) \ \dots \ P_r(0)]$$

Ce vecteur s'appelle aussi *distribution initiale des états* de la chaîne de Markov.

Le vecteur des probabilités d'état présente les propriétés suivantes :

$$0 \leq P_i(n) \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \text{ et}$$

$$\sum_{i=1}^r P_i(n) = 1, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$i=1$$

et s'appelle vecteur *stochastique*.

Une caractéristique importante de ce vecteur est donnée par sa valeur limite, représentant la distribution des probabilités d'état au bout d'un nombre infini de transitions :

$$\mathbf{P}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n) = [\mathbf{P}_1(\infty) \mathbf{P}_2(\infty) \dots \mathbf{P}_r(\infty)] \quad (\text{I.8})$$

Cette limite porte le nom de *distribution limite* et caractérise le *comportement asymptotique* de la chaîne de Markov.

II.1.2. Formule fondamentale d'une chaîne de Markov

Nous appelons *probabilité de transition* entre l'état e_i à l'instant n et l'état e_j à l'instant $n+1$ ($e_i, e_j \in E$), la probabilité $p_{ij}(n)$:

$$p_{ij}(n) = \text{Prob} \{ \xi_{n+1} = e_j / \xi_n = e_i \} , \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ et } i, j = 1, \dots, r. \quad (\text{I.9})$$

En utilisant les probabilités de transition, la probabilité d'état P_j s'écrit sous la forme suivante :

$$P_j(n+1) = P_1(n) p_{1j}(n) + P_2(n) p_{2j}(n) + \dots + P_r(n) p_{rj}(n) \quad (\text{I.10})$$

ou sous une forme vectorielle :

Cette relation écrite pour chaque $j = 1, 2, \dots, r$, nous donne l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathbf{\dagger}(n) \quad (\text{I.11})$$

avec :

$$\mathbf{\dagger}(n) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) & \dots & p_{1r}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) & \dots & p_{2r}(n) \\ p_{31}(n) & p_{32}(n) & p_{33}(n) & \dots & p_{3r}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1}(n) & p_{r2}(n) & p_{r3}(n) & \dots & p_{rr}(n) \end{pmatrix}$$

Cette équation porte le nom de *formule fondamentale* de la chaîne de Markov. Elle rassemble toutes les informations nécessaires pour passer de la distribution de probabilités à l'instant n à la distribution de probabilités à l'instant suivant $n+1$.

La matrice $\mathbf{\dagger}(n)$ est appelée *matrice de transition* à l'instant n . Elle regroupe toutes les probabilités $p_{ij}(n)$ de la chaîne de Markov. Ces probabilités vérifient les propriétés suivantes :

$$0 \leq p_{ij}(n) \leq 1, \quad \forall i, j = 1, \dots, r, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad (\text{I.12})$$

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}(n) = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{I.13})$$

Dans ce cas, la matrice $\mathbf{\dagger}(n)$ est une *matrice stochastique*.

L'équation fondamentale d'une chaîne de Markov se présente sous la forme d'une équation vectorielle récurrente d'ordre 1. Sa forme équivaut à la forme transposée de la représentation d'état d'un système autonome discret, avec le vecteur des probabilités $\mathbf{P}(n)$ qui correspond au vecteur d'état.

Une chaîne de Markov est dite *homogène dans le temps*, quand ses probabilités de transition sont indépendantes de l'instant n considéré. On dit encore que les probabilités de transition sont *stationnaires* et vérifient alors :

$$p_{ij} = \text{Prob} \{ \xi_{n+1} = e_j / \xi_n = e_i \}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad \forall i, j = 1, \dots, r. \quad (\text{I.14})$$

Dans ce cas, l'équation fondamentale de la chaîne considérée (I.11) s'écrit :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathbf{\dagger}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.15})$$

ou sous une forme développée :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2r} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & p_{r3} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix}, \quad \text{à } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{I.16})$$

avec $\mathbf{P}(n) \in \mathbb{R}^{1 \times r}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et les conditions initiales $\mathbf{P}(0) = [P_1(0) \dots P_r(0)]$.

En écrivant la formule fondamentale (I.15) pour $n = 0, 1, 2, \dots$, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(1) &= \mathbf{P}(0) \mathbf{P} \\ \mathbf{P}(2) &= \mathbf{P}(1) \mathbf{P} = \mathbf{P}(0) \mathbf{P}^2 \\ \mathbf{P}(3) &= \mathbf{P}(2) \mathbf{P} = \mathbf{P}(0) \mathbf{P}^3 \\ &\cdots \\ \mathbf{P}(n) &= \mathbf{P}(n-1) \mathbf{P} = \mathbf{P}(0) \mathbf{P}^n \end{aligned}$$

ou encore sous une forme développée :

$$[P_1(n) \ P_2(n) \ \dots \ P_r(n)] = [P_1(0) \ P_2(0) \ \dots \ P_r(0)] \mathbf{P}^n, \quad \text{à } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.17})$$

La formule (I.17) constitue la base de l'étude du comportement d'une chaîne de Markov homogène. L'évolution d'un tel modèle est complètement déterminée par la distribution initiale et la matrice de transition. Son comportement asymptotique résulte des propriétés de la matrice stochastique \mathbf{P}^n quand n tend vers l'infini :

$$\mathbf{P}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n \quad (\text{I.18})$$

II.1.3. Graphe associé à une chaîne de Markov finie

L'analyse des chaînes de Markov se trouve facilitée par l'association d'un modèle graphique. L'étude graphique des chaînes de Markov utilise la théorie des graphes, capable de donner une vision simplifiée du processus et d'obtenir l'essentiel des résultats qualitatifs concernant le comportement du modèle.

Nous associons ainsi à une chaîne de Markov finie représentée par sa matrice de transition $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{i,j=1, \dots, r}$, un graphe $G = (E, \Gamma)$, où E représente l'ensemble des états (*sommets* du graphe) et Γ une application multivoque (les *arcs* du graphe) telle que :

$$\Gamma(e_i) = \{e_j, p_{ij} > 0\}$$

A ce graphe, on peut faire correspondre la matrice adjacente $\Delta = [\delta_{ij}]_{i,j=1, \dots, r}$, telle que :

$$\text{à } i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } p_{ij} = 0 \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } p_{ij} > 0 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Pour obtenir un graphe complet, nous pouvons lui associer aussi les probabilités p_{ij} de transition correspondant aux arcs (e_i, e_j) . Les états d'une chaîne de Markov sont représentés graphiquement

par des sommets (des cercles ou des points), tandis que les transitions sont matérialisées par des arcs orientés reliant les états correspondants et pondérés (éventuellement) par les valeurs des probabilités de transition. Le graphe d'une chaîne de Markov finie à r états prend alors la forme :

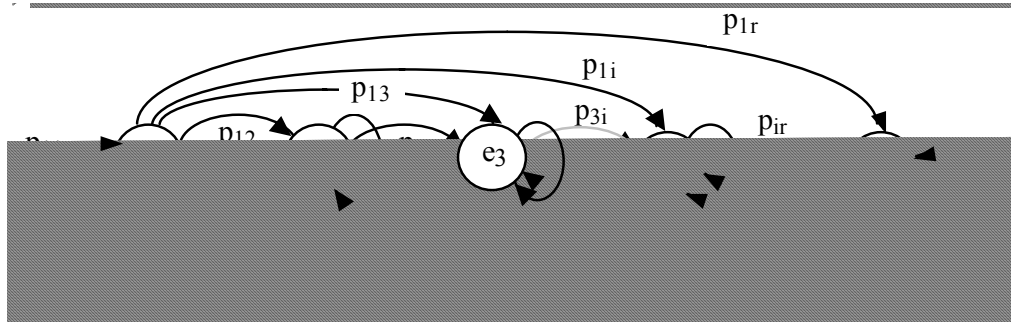


Fig. I.1. Graphe d'une chaîne de Markov finie.

La somme des arcs partant d'un même sommet est toujours égale à 1. Ceci traduit graphiquement la propriété de stochasticité de la matrice de transition de la chaîne de Markov.

Les modèles markoviens à temps continu font partie des systèmes qui interviennent dans notre étude. Pour cela, dans le paragraphe suivant nous présentons quelques éléments de base des processus de Markov à temps continu et espace d'état discret.

II.2. Processus de Markov à espace d'état discret : éléments de base

Nous appelons *processus de Markov*, un processus stochastique continu markovien à espace d'état discret (tab. I.1). De façon similaire que dans le cas des chaînes de Markov, nous pouvons définir une fonction de transition entre les états du système ainsi qu'une formule fondamentale différentielle.

II.2.1. Fonction de transition

En considérant l'expression (I.3) qui définit la propriété de Markov dans le cas continu, il nous vient la *fonction de transition* suivante :

$$p_{ij}(t_0, t) = \text{Prob}\{\xi_t = j / \xi_{t_0} = i\}, \quad \forall t_0, t \in \mathcal{T} \text{ à } [0, +\infty[\quad (I.20)$$

qui donne la fonction de probabilité de l'état e_j à l'instant t si à l'instant initial t_0 le système se trouve dans l'état e_i ($e_i, e_j \in E$ avec E ensemble fini des états du système, de dimension r).

Comme dans le cas discret on peut utiliser la notation matricielle en considérant la matrice de transition $\hat{\mathbf{T}}(t_0, t) = [p_{ij}(t_0, t)]_{i,j=1, \dots, r}$. Cette matrice jouit de propriétés analogues à celles du cas discret :

$$0 \leq p_{ij}(t_0, t) \leq 1, \quad \forall i, j = 1, \dots, r, \quad \forall t_0, t \in \mathcal{T} \text{ et}$$

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}(t_0, t) = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad \forall t_0, t \in T$$

Par conséquent, elle présente la propriété de stochasticté.

II.2.2. Formule fondamentale d'un processus de Markov

De même que dans le cas discret, en associant un vecteur de probabilités d'état stochastique $\mathbf{P}(t)$ qui contient toutes les probabilités des états du système à l'instant t , nous obtenons l'équation :

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t) \mathbf{\dot{P}}(t, t+s), \quad \forall t, t+s \in T$$

Dans le cas homogène, cette équation devient :

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t) \mathbf{\dot{P}}(s), \quad \forall t, t+s \in T \quad (I.21)$$

A partir de cette forme, en remplaçant s par dt respectivement par 0 , nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{\dot{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{\dot{P}}(0), \quad \text{avec } \mathbf{\dot{P}}(0) = \mathbf{Error!} \quad (I.22)$$

que nous allons noter :

$$\mathbf{\dot{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{\ddot{Y}} \quad (I.23)$$

avec le vecteur des probabilités d'état stochastique $\mathbf{P}(t) = [P_1 \dots P_r]'$ (conditions initiales \mathbf{P}_0) et la matrice $\mathbf{\ddot{Y}} = [p_{ij}]'$ qui présente les propriétés suivantes :

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \forall i, j = 1, \dots, r, \quad i \neq j \quad \text{et}$$

$$\sum_{j=1}^r \tilde{p}_{ij}(t) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad \forall t \in [0, T]$$

L'équation (I.23) porte le nom d'équation fondamentale du processus de Markov. La matrice $\mathbf{\ddot{Y}}$ s'appelle *générateur* du processus markovien.

L'équation (I.23) porte le nom de formule fondamentale du processus de Markov. L'intégration de cette formule à partir de \mathbf{P}_0 donné, permet d'obtenir $\mathbf{P}(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

II.3. Classes d'états d'une chaîne de Markov finie [CHR, 74], [SAM, 87]

Dans une chaîne de Markov, l'influence d'un état sur l'évolution du système est en relation avec sa fréquence d'apparition. Une mesure de cette fréquence d'apparition est donnée par les connexions existantes entre les états du modèle. La détection des classes d'états communicants se montre par conséquent très utile pour l'étude du comportement de la chaîne. Dans ce qui suit, nous présentons les éléments mathématiques permettant l'étude de la communication entre les états.

II.3.1. Equation de Chapman-Kolmogorov

Pour une chaîne de Markov homogène, nous allons noter $p^{(n)}_{ij}$ la probabilité de passer de l'état e_i à l'état e_j en exactement n transitions :

$$p^{(n)}_{ij} = \text{Prob}\{\xi_{m+n} = e_j / \xi_m = e_i\}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall i, j \in \{1, \dots, r\}, n = 1, 2, \dots \quad (\text{I.24})$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, cette probabilité satisfait les égalités suivantes :

$$p^{(1)}_{ij} = p_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\} \text{ et } p^{(0)}_{ij} = 0, p^{(0)}_{ii} = 1, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, i \neq j. \quad (\text{I.25})$$

La probabilité $p^{(n)}_{ij}$ est donnée par une relation qui porte le nom *d'équation de Chapman-Kolmogorov*. Cette équation est une relation récurrente permettant de calculer une probabilité de type $p^{(m+n)}_{ij}$ en fonction des probabilités de passage en n respectivement m transitions :

$$p^{(m+n)}_{ij} = \sum_{h \in \{1, \dots, r\}} p^{(m)}_{ih} p^{(n)}_{hj}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\}, \forall m, n = 0, 1, \dots \quad (\text{I.26})$$

Dans le cas particulier $m = 1$, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p^{(2)}_{ij} &= \sum_{h \in \{1, \dots, r\}} p_{ih} p_{hj} \\ p^{(3)}_{ij} &= \sum_{h \in \{1, \dots, r\}} p_{ih} p^{(2)}_{hj} \\ &\dots\dots\dots \\ p^{(n)}_{ij} &= \sum_{h \in \{1, \dots, r\}} p_{ih} p^{(n-1)}_{hj}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\}, \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Nous remarquons que $p^{(n)}_{ij}$ représente l'élément (i, j) de la matrice stochastique \mathbf{P}^n .

II.3.2. Relation de communication entre les états d'une chaîne de Markov

On dit que les états e_i et e_j communiquent si

$$\exists n, m \geq 0 / p^{(n)}_{ij} > 0 \text{ et } p^{(m)}_{ji} > 0. \quad (\text{I.28})$$

Sur le graphe, ceci se traduit par l'existence des liaisons par des arcs entre e_i et e_j (figure I.2).

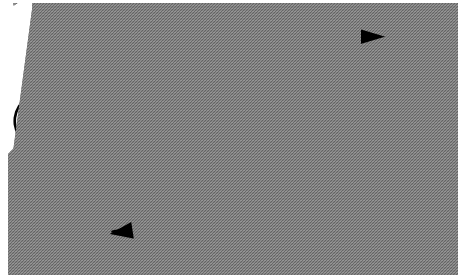


Fig. I.2. Communication des états e_i et e_j .

Le critère de communication permet la décomposition de l'espace d'état en *classes disjointes d'états communicants*. Si tous les états communiquent entre eux, la chaîne de Markov forme une seule classe et porte le nom de *chaîne de Markov irréductible*.

Dans une chaîne de Markov finie, une classe d'états communicants peut être finale ou transitoire.

a) Classes transitoires

Une classe C d'états communicants d'une chaîne de Markov est dite *transitoire* si après un nombre fini de transitions, le système sort de la classe et n'y retourne plus :

$$\forall e_i, e_k \in C \subset E, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^{(n)}_{ik} \neq 0 \text{ et } p^{(m)}_{ik} = 0, \forall m > n, m \in \mathbb{N} \quad (\text{I.29})$$

Un état appartenant à une classe transitoire s'appelle *état transitoire*.

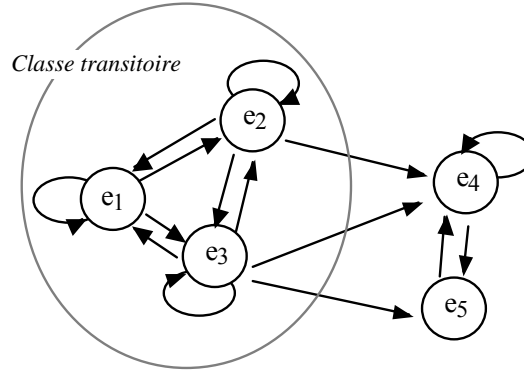


Fig. I.3. Exemple de classe transitoire.

b) Classes finales

Une classe C d'états communicants est dite *finale* si lorsque le système s'y trouve, il y reste indéfiniment :

$$\forall e_i \in C \text{ et } \forall e_j \notin C \Rightarrow p^{(n)}_{ij} = 0, \forall n > 0. \quad (\text{I.30})$$

Les états appartenant à une classe finale portent le nom d'*états persistants*. Au cas où une classe finale se réduit à un seul état, celui-ci s'appelle *état absorbant*. Nous remarquons que lorsque le système atteint un état quelconque d'une classe finale, il suffit d'étudier la sous-chaîne irréductible correspondant à cette classe.

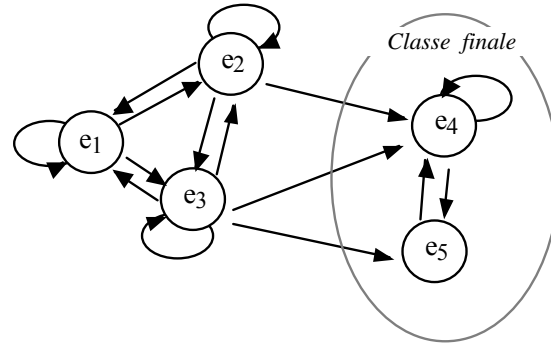


Fig. I.4. Exemple de classe finale.

Une chaîne de Markov finie peut avoir deux types de classes finales : périodique ou ergodique.

b.1. Classes finales périodiques

La périodicité d'une classe finale d'états communicants se caractérise par des séquences de transitions qui passent périodiquement par chaque état ou groupe d'états (figure I.5). Un état persistant e_i est dit *périodique* de période $d(i)$ si

$$d(i) = \text{p.g.d.c} (n / p^{(n)}_{ii} > 0) > 1. \quad (\text{I.31})$$

Une classe finale est *périodique* si tous ses états sont périodiques de même période.

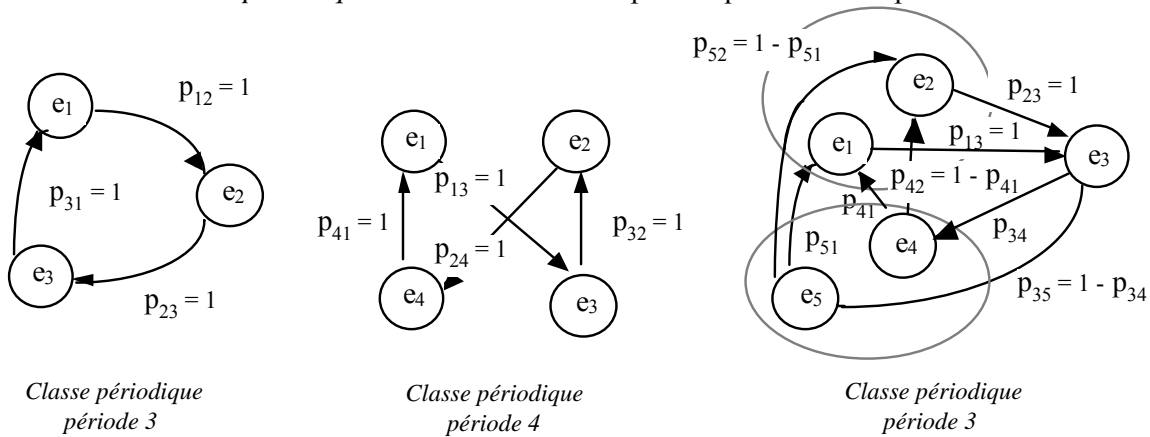


Fig. I.5. Classes périodiques.

b.2. Classes finales ergodiques

D'une manière générale, on dit qu'un processus stochastique est *ergodique* si dans son comportement asymptotique, le système tend vers une distribution limite unique, indépendante des conditions initiales :

$$\mathbf{P}(\square) = \lim_{n \rightarrow \square} \mathbf{P}(n) = \Pi, \quad \forall \mathbf{P}(0). \quad (\text{I.32})$$

Dans ce cas, la distribution limite est identique à la distribution stationnaire Π du système.

La propriété d'ergodicité d'une chaîne de Markov irréductible finie peut être détectée directement sur le graphe. Lorsque dans une classe finale d'une chaîne de Markov il existe une transition de type p_{ii} non nulle, cette classe ne peut pas être périodique. Une telle classe finale sera forcément ergodique (figure I.6. a). Il en sera de même pour toute classe d'une chaîne finie dans laquelle tous les circuits périodiques existants entre les états n'ont pas la même période (figure I.6. b - le circuit $e_1e_2e_3e_4e_1$ de période 4 et le circuit $e_2e_3e_4e_2$ de période 3).

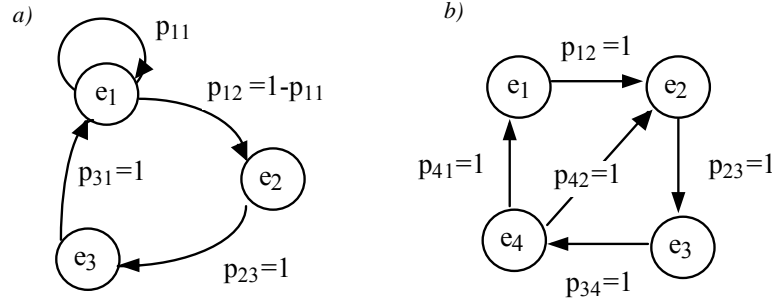


Fig. I.6. Classes ergodiques

Dans une chaîne finie quelconque, les états ne peuvent être tous transitoires. Il doit y avoir au moins une classe finale. Si la chaîne de Markov finie est irréductible, elle constitue entièrement, soit une classe finale périodique, soit une classe finale ergodique.

Remarque

Un processus de Markov est dit ergodique si dans son comportement asymptotique, le système tend vers une distribution limite unique Π , indépendante des conditions initiales :

$$\mathbf{P}(\square) = \lim_{t \rightarrow \square} \mathbf{P}(t) = \tilde{\Pi}, \quad \forall \mathbf{P}_0.$$

II.3.5. Eléments d'algèbre des chaînes de Markov réductibles

Considérons une chaîne de Markov finie (m états) *réductible* et homogène, représentée par l'équation fondamentale :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathbf{M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.33})$$

où $\mathbf{P}(n)$ est le vecteur des probabilités d'état, et \mathbf{M} représente la matrice de transition stochastique :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix} \quad (\text{I.34})$$

Le *rayon spectral* ρ de la matrice \mathcal{M} est défini par :

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\max_{i,j=1,\dots,m} \{p_{ij}^{(k)}\}} \quad (I.35)$$

Comme $p_{ij}^{(k)}$ est l'élément i, j de la matrice stochastique \mathcal{M}^k , il est évident que ce rayon spectral est égal à 1. Ceci nous permet d'affirmer que les valeurs absolues de toutes les valeurs propres de la matrice de transition d'une chaîne de Markov sont plus petites ou égales à 1 :

$$|\lambda_i| \leq \max_{i=1}^m |\lambda_i| \leq \rho = 1, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (I.36)$$

La matrice \mathcal{M} étant une matrice stochastique, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{M} (v; v; \dots; v) = v \mathcal{M} (1; 1; \dots; 1) = v \mathbf{1} = v \mathbf{1} \quad (I.37)$$

Nous concluons que la matrice de transition d'une chaîne de Markov présente au moins une valeur propre $\lambda_1 = 1$. Le vecteur propre correspondant a toutes ses composantes identiques :

$$\mathbf{v}_1 = (v; v; \dots; v) \quad (I.38)$$

Nous présentons maintenant quelques propriétés importantes du spectre de la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie [CHR, 74] :

- pour une matrice stochastique finie, l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 est égal au nombre de classes finales. La valeur propre 1 de la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible est une valeur propre simple.

- les racines d'ordre d de l'unité sont des valeurs propres de multiplicité 1 de la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie, irréductible et périodique de période d . En plus, cette matrice n'a pas d'autres valeurs propres de module 1.

- toute valeur propre de module 1 de la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie est une racine de l'unité. Les racines d'ordre d de l'unité sont des valeurs propres si et seulement si la chaîne contient une classe finale de période d . La multiplicité de chaque d -ième racine de l'unité est égale au nombre de classes finales périodiques de période d .

II.3.6. Décomposition de la matrice de transition d'une chaîne de Markov réductible

Dans le cas d'une chaîne de Markov réductible, le modèle possède des états transitoires et des états persistants. Nous allons noter par q le nombre d'états transitoires et par r ($r = m - q$) le nombre d'états persistants (m est le nombre total d'états du système). Ces deux types d'états peuvent être mis en évidence en effectuant des permutations des lignes et colonnes de la matrice de transition \mathcal{M} , de telle façon qu'elle s'écrive sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\dagger} \end{pmatrix} \quad (I.39)$$

où : \mathbf{T} est une matrice carrée ($q \times q$) des probabilités de transition entre les q états transitoires, $\mathbf{\dagger}$ est la sous-matrice carrée ($r \times r$) associée aux r états persistants de la chaîne,

\mathbf{Q} est la sous-matrice ($q \times r$) des transitions entre les états transitoires et persistants,
 $\mathbf{0}$ est une matrice à éléments nuls, de dimension ($r \times q$).

La stochasticité de la matrice \mathbf{M} se trouve reportée sur la matrice \ddagger . Si le nombre de classes persistantes est c , la matrice \ddagger peut s'écrire sous la forme bloc diagonale suivante :

$$\ddagger = \begin{pmatrix} \ddagger_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddagger_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddagger_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddagger_c \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

Cette forme fait apparaître l'indépendance des classes finales entre elles, et peut être obtenue par simple permutation des lignes et colonnes dans la matrice initiale \mathbf{M} . Chaque matrice \ddagger_i

représente une matrice irréductible carrée (de dimension $r_i \times r_i$, $\sum_{i=1}^c r_i = r$), associée à la classe finale i ($i = 1, 2, 3, \dots, c$) comme le montre la figure I.7 :

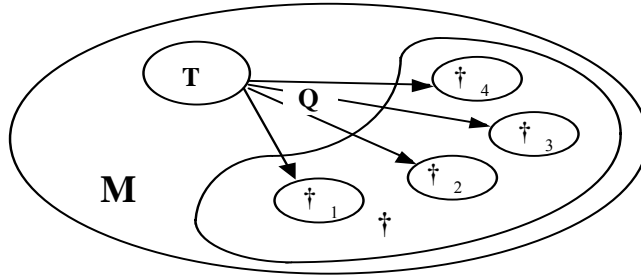


Fig. I.7. Classes d'une chaîne de Markov réductible.

Une interprétation physique de ce schéma consiste à dire que dans son évolution, le système tend à quitter sa partie transitoire après un certain nombre de transitions. Lorsqu'un état quelconque d'une classe finale est atteint, tous ses états futurs appartiennent à cette même classe.

Dans le système (I.33), le vecteur $\mathbf{P}(n)$ peut être partitionné en deux composantes correspondant aux états transitoires (\mathbf{P}_{tr}) et aux états persistants (\mathbf{P}_{per}). Par conséquent, il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[\mathbf{P}_{tr}(n+1) \quad \mathbf{P}_{per}(n+1)] = [\mathbf{P}_{tr}(n) \quad \mathbf{P}_{per}(n)] \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \ddagger \end{pmatrix} \quad (\text{I.41})$$

avec $\mathbf{P}_{tr}' \hat{e}^{1 \times q}$, $\mathbf{P}_{per}' \hat{e}^{1 \times r}$

ou sous une forme développée :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{tr}(n+1) = \mathbf{P}_{tr}(n) \mathbf{T} & (a) \\ \mathbf{P}_{per}(n+1) = \mathbf{P}_{tr}(n) \mathbf{Q} + \mathbf{P}_{per}(n) \dagger & (b) \end{cases} \quad (I.42)$$

En écrivant l'équation (I.42)-a pour $n = 0, 1, 2, \dots, n-1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{tr}(1) &= \mathbf{P}_{tr}(0) \mathbf{T} \\ \mathbf{P}_{tr}(2) &= \mathbf{P}_{tr}(1) \mathbf{T} = \mathbf{P}_{tr}(0) \mathbf{T}^2 \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{P}_{tr}(n) &= \mathbf{P}_{tr}(n-1) \mathbf{T} = \mathbf{P}_{tr}(0) \mathbf{T}^n \end{aligned} \quad (I.43)$$

En tenant compte de la relation $\|\mathbf{T}\| < 1$ (sous-matrice de la matrice stochastique \mathcal{M}), nous pouvons écrire par la suite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{tr}(n) = \mathbf{P}_{tr}(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}^n = \mathbf{0} \quad (I.44)$$

Ce qui signifie que la distribution limite correspondant aux états transitoires devient nulle et par conséquent nous pouvons conclure que le comportement asymptotique de la chaîne de Markov est donné uniquement par la partie persistante.

Pour illustrer les différents éléments algébriques et graphiques que nous venons d'introduire, nous présentons l'exemple numérique suivant :

II.3.7. Exemple numérique

Considérons la matrice de transition suivante, correspondant à une chaîne de Markov constituée de 12 états :

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (n)$$

Les valeurs propres de la matrice de transition \mathcal{M} sont les suivantes :

$$0.65 ; -0.31 ; 0.17 + 0.25i \text{ (module } 0.30) ; 0.17 - 0.25i \text{ (module } 0.30) ; -0.5 ; 1 ; 0.33 ; 0.33 ; -1 ; 0 + i \text{ (module } 1) ; 0 - i \text{ (module } 1) ; 1,$$

Le spectre ainsi obtenu met en évidence l'existence de deux classes persistantes relativement aux deux valeurs propres égales à 1. Une des classes finales est périodique de période 4 comme le

montrent les valeurs propres -1 ; $0 + i$; $0 - i$; 1 qui sont des racines d'ordre 4 de l'unité, et la deuxième classe finale est ergodique. La chaîne de Markov étudiée est *réductible*. Le tracé de son graphe (figure I.8) fait apparaître trois classes d'états communicants :

- une classe transitoire formée par les états e_5, e_6, e_7, e_8 ,
- deux classes finales : une (ergodique) formée par les états e_1, e_2, e_3, e_4 et l'autre (périodique) par $e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}$.

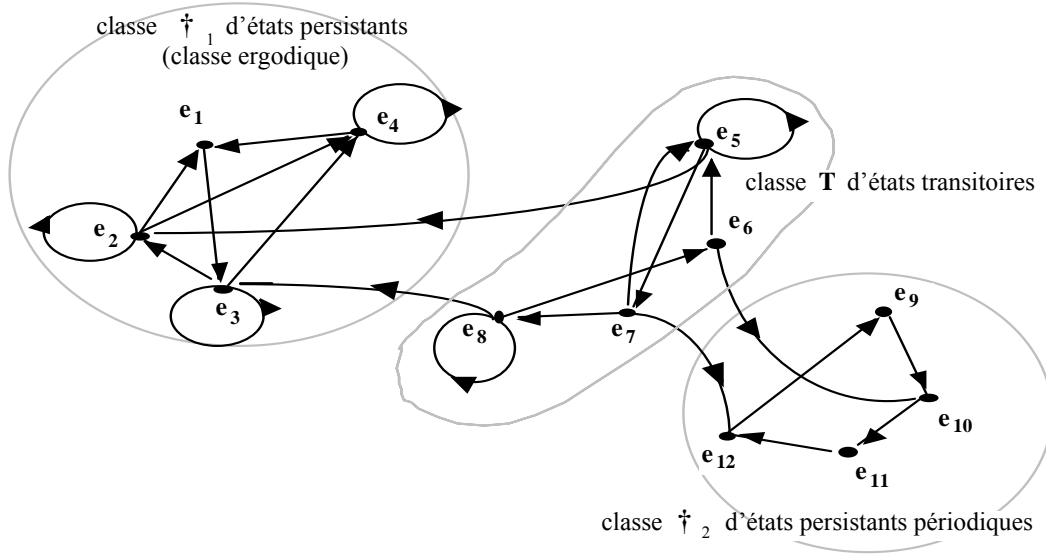


Fig. I.8. Graphe de la chaîne de Markov finie.

En opérant la permutation

$$\{e_5, e_6, e_7, e_8, e_1, e_2, e_3, e_4, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$$

sur les lignes et les colonnes de la matrice initiale, celle-ci prend la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|cccccccc} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{T} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\dagger} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{T} & \mathbf{Q} & & \\ \hline & & \mathbf{\dagger}_1 & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{\dagger}_2 \end{array} \right)$$

où nous faisons apparaître les différentes classes vues auparavant.

Le comportement à long terme des chaînes de Markov est un des problèmes les plus importants de leur étude. Ceci s'avère très intéressant dans le cas de la mise en place de la

politique de gestion d'un système de type aléatoire (gestion des stocks, démarche publicitaire, politique de maintenance, problème du renouvellement de l'équipement etc...). Ces situations demandent une maîtrise de calcul du comportement asymptotique du modèle aléatoire associé. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter quelques méthodes de résolution des chaînes de Markov ergodiques.

II.4. Méthodes de résolution des chaînes de Markov irréductibles ergodiques

Considérons la formule fondamentale d'une chaîne de Markov *irréductible* finie et ergodique :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathbf{\dagger} \quad (I.45)$$

où $\mathbf{P}(n)$ ' $\hat{e}^{1 \times r}$ représente le vecteur de distribution des probabilités
et $\mathbf{\dagger}$ ' $\hat{e}^{r \times r}$ la matrice de transition.

Nous pouvons nous intéresser à l'évolution des solutions des chaînes de Markov en *régime transitoire* ou en *régime permanent*.

La formule (I.17) constitue la base de l'étude du *régime transitoire* des probabilités d'état :

$$[P_1(n) \dots P_r(n)] = [P_1(0) \dots P_r(0)] \mathbf{\dagger}^n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (I.46)$$

La connaissance de la matrice de transition et de la distribution initiale, nous permet de déterminer la distribution des probabilités à n'importe quel instant fini.

L'étude des probabilités d'état de la chaîne de Markov ergodique en *régime permanent* se fait à l'aide de méthodes spécifiques. Dans ce qui suit, nous présentons deux méthodes de calcul de la distribution limite : la méthode directe et la méthode indirecte.

II.4.1. Méthode directe pour l'étude du régime permanent des chaînes de Markov ergodiques

Lorsque nous faisons tendre n vers l'infini dans la formule fondamentale (I.45) , nous obtenons :

$$\mathbf{P}(\infty) = \mathbf{P}(\infty) \mathbf{\dagger} \quad (I.47)$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{P}(\infty) (\mathbf{\dagger} - \mathbf{I}) = 0 \quad (I.48)$$

Si on note $\mathbf{\dagger} - \mathbf{I} = \mathbf{D}$ (\mathbf{I} représente la matrice unité de dimension $r \times r$), la relation (I.48) se réécrit :

$$\mathbf{P}(\infty) \mathbf{D} = 0 \quad (I.49)$$

La matrice \mathbf{D} est une matrice singulière et porte le nom de *matrice dynamique* de la chaîne de Markov. Dans le cas des chaînes de Markov irréductibles (une seule valeur propre 1), le rang de la matrice \mathbf{D} est $r-1$. Par conséquent, la résolution du système (I.49) devient possible à condition d'y adjoindre une relation supplémentaire.

En utilisant la propriété de stochasticité du vecteur des probabilités d'état, le système à résoudre s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\square) \mathbf{D} = 0 \\ P_1(\square) + P_2(\square) + P_3(\square) + \dots + P_r(\square) = 1 \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

ce qui permet le calcul de la distribution limite $\mathbf{P}(\infty) = [P_1(\infty) \ P_2(\infty) \ \dots \ P_r(\infty)]$.

II.4.2. Méthode indirecte pour l'étude du régime permanent des chaînes de Markov ergodiques

Le principe de cette méthode consiste à écrire la matrice de transition de la chaîne sous une forme diagonale à l'aide d'une transformation modale.

Reprenons l'équation (I.17) correspondant à l'étude du régime transitoire d'une chaîne de Markov irréductible et ergodique, ayant r états :

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0) \mathbf{\dagger}^n \quad (\text{I.51})$$

Supposons que la matrice de transition $\mathbf{\dagger}$ est diagonalisable et soient \mathbf{V} et \mathbf{F} les matrices des vecteurs propres respectivement des formes propres de la matrice $\mathbf{\dagger}$. Celle-ci s'écrit dans la base modale :

$$\mathbf{\dagger} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} \quad (\text{I.52})$$

avec

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_r], \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix} \quad (\text{I.53})$$

$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}$ et

Nous avons noté par \mathbf{v}_i ($i=1, \dots, r$) les vecteurs propres (vecteurs colonnes), et par \mathbf{f}_i ($i=1, \dots, r$) les formes propres (vecteurs lignes) de la matrice $\mathbf{\dagger}$. $\mathbf{\Lambda}$ représente la matrice diagonale formée par les valeurs propres λ_i ($i=1, \dots, r$) de la matrice de transition.

En remplaçant (I.52) dans l'équation (I.51), nous obtenons la relation (I.54) :

$$[P_1(n) \ P_2(n) \ \dots \ P_r(n)] = [P_1(0) \ P_2(0) \ \dots \ P_r(0)] [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_r] \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda_r)^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_r \end{bmatrix} \quad (\text{I.54})$$

Une chaîne de Markov irréductible ergodique possède une seule valeur propre de module 1 ($\lambda_1=1$). En faisant tendre n vers l'infini, l'équation (I.54) prend la forme suivante :

$$\mathbf{P}(\square) = \mathbf{P}(0) \mathbf{V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{F} \quad (\text{I.55})$$

Un calcul relativement simple nous permet de déterminer maintenant la distribution limite de la chaîne étudiée.

De part sa simplicité, la méthode directe de résolution est la plus souvent utilisée. Elle présente une grande applicabilité notamment pour les systèmes de grande taille. En revanche, la méthode indirecte présente l'avantage de mettre en évidence la structure spectrale de la matrice de transition du système.

Une fois le calcul de la distribution limite de chaque classe finale ergodique fait, il s'agit d'avoir une image d'ensemble de la chaîne réductible d'origine. Pour cela, nous présentons le principe de calcul des probabilités d'absorption par les classes finales, en considérant que le système commence son évolution dans un état transitoire.

II.5. Méthode de calcul des probabilités d'absorption par les classes finales [CHR, 74]

Soit la chaîne de Markov réductible finie suivante :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \mathcal{M} \quad (\text{I.56})$$

avec $\mathbf{P}(n) = [P_i(n)]_{i=1, \dots, m}$ $\hat{e}^{1 \times m}$ la distribution des probabilités à l'instant n et $\mathcal{M} = [m_{ij}]_{i,j=1, \dots, m}$ $\hat{e}^{m \times m}$ la matrice de transition.

Nous supposons que :

- le nombre total d'états persistants de la chaîne est r ,
- la chaîne de Markov réductible possède c classes finales.

dans ce cas, la matrice \mathcal{M} s'écrit en fonction des classes d'états communicants sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\dagger} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} \mathbf{T} & \mathbf{Q} & & & \\ \hline \mathbf{\dagger}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{\dagger}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{\dagger}_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{\dagger}_c \end{array} \right) \quad (\text{I.57})$$

avec

$$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (m-r)}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times r}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i} \text{ où } i = 1, \dots, c \text{ et } \mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_c$$

Si le processus commence son évolution dans un état transitoire, il ne pourra évoluer autrement qu'en tendant vers l'une de ses classes finales et il y reste. Nous nous intéressons au phénomène d'absorption par les classes finales.

Nous allons noter par Tr l'ensemble des états transitoires. La notation Fin_j est utilisée pour l'ensemble des états persistants de la classe finale caractérisée par la matrice de transition \mathbf{f}_j ($j = 1, \dots, c$). Par ailleurs, nous allons garder la notation E pour l'ensemble des états de la chaîne réductible étudiée.

En supposant que l'état initial de la chaîne est un état transitoire e_i , nous allons déterminer la probabilité α_i^j d'absorption par la classe finale Fin_j avec $j = 1, 2, \dots, c$.

Calculons α_i^j en décomposant selon la première transition :

$$\alpha_i^j = \sum_{e_d \in E} p_{id} \times \text{Probabilité \{absorption par la classe finale } j \text{ / } e_d = \text{état initial \}}$$
(I.58)

avec p_{id} la probabilité de transition de l'état e_i à l'état e_d .

Par évaluation de la probabilité conditionnelle, nous pouvons écrire :

$$\alpha_i^j = \sum_{e_d \in Fin_j} p_{id} + \sum_{e_d \in Tr} p_{id} \alpha_d^j$$
(I.59)

En notant par α^j le vecteur colonne des probabilités d'absorption par la classe j :

$$\alpha^j = [\alpha_i^j]_{i=1, \dots, r-m}, e_i \in Tr$$

et par χ^j le vecteur colonne

$$\chi^j = [\chi_i^j]_{i=1, \dots, r-m} \text{ avec } \chi_i^j = \begin{bmatrix} \sum_{e_d \in Fin_j} p_{id} \end{bmatrix} \text{ à } e_i \in Tr,$$

nous obtenons l'égalité :

$$\alpha^j = \chi^j + \mathbf{T} \alpha^j$$
(I.60)

avec \mathbf{T} la matrice des probabilités de transition entre les états transitoires.

Le vecteur des probabilités d'absorption par la classe j s'écrit :

$$\alpha^j = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \chi^j$$
(I.61)

Dans les calculs on utilisera le fait que le processus, partant d'un état transitoire quelconque, finira inévitablement dans une des classes finales. Nous aurons donc la formule suivante :

$$\square_{j=1}^c \alpha^j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (I.62)$$

La distribution limite d'une chaîne de Markov finie réductible est dépendante des conditions initiales. Si l'état initial de la chaîne est un état persistant, le système évolue tout le temps dans la même classe. Dans ce cas, les probabilités limites sont celles calculées par une des méthodes présentées dans le paragraphe précédent. Si l'état initial est transitoire, alors les probabilités limites des états persistants sont données par le produit des probabilités calculées de façon classique et la probabilité d'absorption par la classe finale correspondante.

Les dimensions souvent trop importantes des modèles markoviens rendent ces calculs très difficiles à aborder à l'aide des moyens et algorithmes habituels. Cet inconvénient exige la mise au point de méthodes de simplification adéquates. L'équation fondamentale de la chaîne de Markov présente les mêmes éléments qu'une équation d'état d'un système dynamique discret. Le vecteur des probabilités d'état et la matrice de transition correspondent ainsi au vecteur état respectivement à la matrice caractéristique. La solution d'une chaîne de Markov est obtenue par la distribution des valeurs propres de la matrice de transition, comme dans le cas des systèmes discrets. Cette similitude dans la forme de l'équation et la nature de la solution nous incite à utiliser les méthodes de perturbations singulières connues dans les équations d'état, en vue de simplifier les chaînes de Markov. Nous rappelons ainsi les différentes modélisations, les différentes méthodes de découplage et les propriétés des systèmes découplés correspondants.

III. Simplification des modèles d'état à l'aide des perturbations singulières

Le principe de la méthode des perturbations singulières s'applique à des systèmes contenant des petits paramètres dans leur modèles, qui par annulation introduisent une singularité correspondant à une réduction de l'ordre de ce modèle.

De nombreux travaux ont montré l'importance de la méthode des perturbations singulières dans l'analyse et la synthèse des systèmes complexes [KOK, 76], [KOK, 86], [CHO, 78], [MOR, 84], [KHA, 87]. Dans ce qui suit nous présentons le principe de la méthode dans le cas continu et discret des systèmes linéaires à double échelle de temps, représentés sous forme d'équation d'état.

III.1. Perturbations singulières dans le cas des systèmes continus [KOK, 76]

Un système continu linéaire et stationnaire peut être modélisé par une équation différentielle d'état vectorielle de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{X}(t) \end{cases}, \quad \mathbf{X}(0) : \text{les conditions initiales} \quad (\text{I.63})$$

où $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^r$ désigne le *vecteur d'état*,
 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^e$ le *vecteur de commande*,
 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^s$ le *vecteur de sortie*.

\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} sont des matrices de dimensions $r \times r$, $r \times e$ et respectivement $s \times r$.

Lorsque le système (I.63) possède la propriété de double échelle de temps, il peut être mis sous la forme partitionnée suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.64})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &\in \mathbb{R}^{r_1 \times r_1}, \quad \mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2}, \quad \mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_1}, \quad \mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}, \\ \mathbf{B}_1 &\in \mathbb{R}^{r_1 \times e}, \quad \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times e}, \\ \mathbf{C}_1 &\in \mathbb{R}^{s \times r_1}, \quad \mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{s \times r_2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^{r_1} \text{ le vecteur d'état de la partie lente (condition initiale } \mathbf{x}(0)), \\ \mathbf{z} &\in \mathbb{R}^{r_2} \text{ le vecteur d'état de la partie rapide (condition initiale } \mathbf{z}(0)), \\ \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad r = r_1 + r_2. \end{aligned}$$

III.1.1. Mise sous forme singulièrement perturbée

Le système linéaire continu (I.64) s'écrit sous la forme singulièrement perturbée par l'introduction d'un petit paramètre ε qui multiplie la dérivée de la variable rapide :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \varepsilon \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2^* \end{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.65})$$

Le petit paramètre $\varepsilon \in [0,1]$ permet la comparaison des échelles de temps différentes et harmonise les ordres de grandeur de la matrice caractéristique.

Les sous matrices normalisées sont notées : $\mathbf{A}_{21}^* = \mathbf{A}_{21} \cdot \varepsilon$, $\mathbf{A}_{22}^* = \mathbf{A}_{22} \cdot \varepsilon$ et $\mathbf{B}_2^* = \mathbf{B}_2 \cdot \varepsilon$.

III.1.2. Découplage des dynamiques

- Partie lente -

Le modèle réduit lent est obtenu en considérant que les variables rapides \mathbf{z} ont atteint leur régime permanent, ce qui correspond à écrire $\varepsilon = 0$. Les variables \mathbf{x} , \mathbf{z} , \mathbf{U} et \mathbf{Y} sont ainsi approchées par leurs composantes lentes :

$$\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_l, \mathbf{u}_l \text{ et } \mathbf{y}_l$$

décrites par un système lent d'ordre réduit. L'approche des variables lentes \mathbf{x} du système initial par les variables \mathbf{x}_l du système lent réduit est valable sur toute la période d'évolution :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t), \quad \forall t \geq 0 \text{ avec } \mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}(0).$$

Par contre, la valeur initiale de la composante rapide entraînée \mathbf{z}_l ainsi calculée ne satisfait pas l'approche de la partie rapide, surtout dans la proximité de zéro :

$$\mathbf{z}_l(0) = -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}(0) \neq \mathbf{z}(0)$$

Les variables rapides $\mathbf{z}(t)$ ne peuvent donc pas être approximées par $\mathbf{z}_l(t)$ sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$.

- Partie rapide -

Introduisons les changements de variables suivants

$$\mathbf{z}_r = \mathbf{z} - \mathbf{z}_l$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{U} - \mathbf{u}_l$$

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{Y} - \mathbf{y}_l$$

représentant l'évolution des variations rapides par rapport à leur évolution en régime permanent. L'équation de couche limite (composante \mathbf{z}_r), exprimée en temps dilaté $\xi = \varepsilon t$ = **Error!**

Le système continu découplé ainsi obtenu s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_l \\ \frac{d}{d\xi} \mathbf{z}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{pmatrix} \\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_l & \mathbf{C}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix} + \mathbf{D}_l \mathbf{u}_l \\ \mathbf{z}_l = -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_l - \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_l \end{cases} \quad (I.66)$$

avec $\mathbf{A}_l = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{22}$,
 $\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_2$,
 $\mathbf{C}_l = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_2$,
 $\mathbf{D}_l = -\mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2$,

et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_l(0) &= \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}_r(0) &= \mathbf{z}(0) + \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Les variables initiales sont approchées par les variables des systèmes découplés sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) \cong \mathbf{x}_l(t), \quad \mathbf{z}(t) \cong \mathbf{z}_r(\xi) + \mathbf{z}_l(t) \quad (\text{I.67})$$

Nous remarquons que le sous-système lent obtenu après découplage (\mathbf{A}_l , \mathbf{B}_l , \mathbf{C}_l , \mathbf{D}_l) prend en compte l'évolution de la partie rapide. Ceci confère à cette partie une grande précision d'approximation.

III.2. Perturbations singulières dans le cas des systèmes discrets

Pour une classe importante de systèmes linéaires stationnaires discrets, l'équation d'état du processus entre deux instants d'échantillonnage s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_n + \mathbf{B} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{C} \mathbf{X}_n \end{cases}, \quad \text{avec les conditions initiales } \mathbf{X}_0. \quad (\text{I.68})$$

\mathbf{X}_n , \mathbf{U}_n , \mathbf{Y}_n désignent respectivement le vecteur état, le vecteur de sortie et le vecteur de commande à l'instant n :

$$\mathbf{X}_n \in \hat{\mathbf{e}}^r, \quad \mathbf{Y}_n \in \hat{\mathbf{e}}^s, \quad \mathbf{U}_n \in \hat{\mathbf{e}}^e \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

\mathbf{A} représente la *matrice d'évolution du système en régime libre* (dimension $r \times r$),

\mathbf{B} représente la *matrice de commande* (dimension $r \times e$),

\mathbf{C} représente la *matrice d'observation* (dimension $s \times r$).

Remarque

Lorsque $\mathbf{U}_n = 0$, le système se dit *autonome*. Avec $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ (matrice unité $r \times r$), le système (I.65) se réduit à :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_n \quad (\text{I.69})$$

ou, sous une forme transposée :

$$\mathbf{X}^{T:n+1} = \mathbf{X}^{T:n} \mathbf{A}^T \quad (\text{I.70})$$

Le système d'état discret autonome ainsi obtenu présente une forme semblable à la formule fondamentale d'une chaîne de Markov finie.

q

Lorsque le système (I.68) possède la propriété de double échelle de temps, il peut s'écrire

sous la forme partitionnée suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.71})$$

avec $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{r_1}$ le vecteur d'état de la partie lente (condition initiale \mathbf{x}_0),

$\mathbf{z}_n \in \mathbb{R}^{r_2}$ le vecteur d'état de la partie rapide (condition initiale \mathbf{z}_0),

$\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n; \mathbf{z}_n) \in \mathbb{R}^r$, $r_1 + r_2 = r$.

et les matrices partitionnées correspondantes :

$\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2}$, $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_1}$, $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$ pour la matrice \mathbf{A} ,

$\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times e}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times e}$ pour la matrice \mathbf{B} ,

$\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{s \times r_1}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{s \times r_2}$ pour la matrice \mathbf{C} .

Contrairement aux systèmes continus, où la modélisation sous forme singulièrement perturbée est unique, dans le cas des systèmes discrets on retrouve une multiplicité des modélisations existantes. Dans ce sens, nous proposons ici trois études relatives à trois modélisations différentes.

III.2.1. Modélisation de Phillips [PHP-a, 80]

a) Modélisation sous forme singulièrement perturbée

Dans un travail de synthèse sur les systèmes discrets singulièrement perturbés [PHP-a, 80], Phillips propose une modélisation singulièrement perturbée générique des systèmes discrets. Cette modélisation comporte deux paramètres. Le premier $\mu \in [0,1]$ matérialise la séparation des dynamiques, tandis que le deuxième $j \in [0,1]$ fait apparaître la notion de couplage entre les états du système. Le système (I.71) s'écrit ainsi sous la forme singulièrement perturbée suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mu^{1-j} \mathbf{A}_{12}^* \\ \mu^j \mathbf{A}_{21}^* & \mu \mathbf{A}_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.72})$$

Le facteur μ peut être choisi comme étant le rapport $\|\mathbf{A}_{22}\| / \|\mathbf{A}_{11}\|$. Les sous matrices normalisées sont notées : $\mathbf{A}_{12}^* = \mathbf{A}_{12} / \mu^{1-j}$, $\mathbf{A}_{21}^* = \mathbf{A}_{21} / \mu^j$ et $\mathbf{A}_{22}^* = \mathbf{A}_{22} / \mu$.

Les valeurs extrêmes du paramètre j correspondent à :

- $j = 0$ quand les matrices \mathbf{A}_{12} et \mathbf{A}_{22} sont disproportionnées par rapport à \mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{21}
- $j = 1$ quand la disproportion concerne \mathbf{A}_{22} et \mathbf{A}_{21} par rapport à \mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{12} .

b) Découplage des dynamiques

Pour découpler les deux dynamiques du système discret (I.72), Phillips utilise une technique de bloc diagonalisation par un double changement de base.

La première transformation consiste à définir une variable \mathbf{z}_{rn} telle que :

$$\mathbf{z}_{rn} = \mathbf{z}_n + \mathbf{R} \mathbf{x}_n \quad (\text{I.73})$$

qui permet de bloc-triangulariser le système (I.72), qui s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{z}_{rn+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{R} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{R}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_{rn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 + \mathbf{R}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{R}, \mathbf{C}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_{rn} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.74})$$

où \mathbf{R} est choisie comme solution de l'équation de Riccati suivante :

$$\mathbf{A}_{21} + \mathbf{R} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{22} \mathbf{R} - \mathbf{R} \mathbf{A}_{12} \mathbf{R} = 0 \quad (\text{I.75})$$

La deuxième transformation est opérée sur la composante \mathbf{x}_n du modèle et consiste à définir une nouvelle variable \mathbf{x}_{ln} telle que :

$$\mathbf{x}_{ln} = \mathbf{x}_n - \mathbf{L} \mathbf{z}_{rn} \quad (\text{I.76})$$

permettant de diagonaliser le système qui s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ln+1} \\ \mathbf{z}_{rn+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{R}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ln} \\ \mathbf{z}_{rn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{R})\mathbf{B}_1 - \mathbf{L}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2 + \mathbf{R}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{R}, \mathbf{C}_1\mathbf{L} + \mathbf{C}_2(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{L})) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ln} \\ \mathbf{z}_{rn} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.77})$$

où \mathbf{L} est choisie comme solution de l'équation de Lyapunov ci-dessous :

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12})\mathbf{L} - \mathbf{L}(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{R}\mathbf{A}_{12}) + \mathbf{A}_{12} = 0 \quad (\text{I.78})$$

Les matrices \mathbf{R} et \mathbf{L} peuvent être calculées à l'aide des équations récurrentes que nous présentons ci-dessous [KOK, 76], [AVR, 79] :

$$\mathbf{R}_{i+1} = (-\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i\mathbf{A}_{12}\mathbf{R}_i)\mathbf{A}_{11}^{-1} \quad (\text{I.79})$$

$$\mathbf{L}_{i+1} = \mathbf{A}_{11}^{-1} (\mathbf{A}_{12} \mathbf{L}_i + \mathbf{L}_i (\mathbf{A}_{22} + \mathbf{R} \mathbf{A}_{12}) - \mathbf{A}_{12}) \quad (\text{I.80})$$

Les solutions à l'ordre zéro en μ des équations (I.79) et (I.80) sont respectivement \mathbf{R}_0 et \mathbf{L}_0 et sont données par :

$$\mathbf{R}_0 = -\mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \quad (\text{I.81})$$

$$\mathbf{L}_0 = -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \quad (\text{I.82})$$

En tenant compte de ces solutions et en faisant l'approximation $\mathbf{I} - \mathbf{R}_0 \mathbf{L}_0 \approx \mathbf{I}$ ($\mathbf{R}_0 \mathbf{L}_0$ est de l'ordre de μ) nous obtenons le système découplé suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{l n+1} \\ \mathbf{z}_{r n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{l n} \\ \mathbf{z}_{r n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_l \\ \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_l & \mathbf{C}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{l n} \\ \mathbf{z}_{r n} \end{pmatrix} \\ \mathbf{z}_{l n} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{x}_{l n} \end{cases} \quad (\text{I.83})$$

avec : $\mathbf{A}_l = \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1}$, $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}$,

$\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1$,

$\mathbf{C}_l = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1}$ et $\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}$

ainsi que les conditions initiales : $\mathbf{x}_{l 0} = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{z}_{r 0} = \mathbf{z}_0 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{x}_0$$

L'approche des variables du système initial par les variables des sous-systèmes découplés est la suivante :

$$\mathbf{x}_n \cong \mathbf{x}_{l n} \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_n \cong \mathbf{z}_{r n} + \mathbf{z}_{l n} \quad (\text{I.84})$$

Les systèmes découplés à l'aide de cette méthode sont caractérisés par une grande précision de l'approximation. En effet, l'évolution de chaque partie prend en compte l'influence de l'autre.

Des variantes du modèle décrit par les équations (I.72) sont obtenues en attribuant à j ses valeurs extrêmes. De nombreux articles sont parus à ce sujet [HIS, 88], [SYR, 83], [RAJ, 81] [BEN, 82], [ELM, 85]. Parmi ces travaux, El Moudni [ELM, 85] propose une modélisation qui présente un grand intérêt d'application.

III.2.2. Modélisation d'El Moudni [ELM, 85]

a) Forme singulièrement perturbée

La forme singulièrement perturbée utilisée ici, est celle qui consiste à affecter le coefficient de perturbation μ à la variable rapide \mathbf{z}_n . Dans ce cas, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mu \mathbf{z}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mu \mathbf{z}_n \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.85})$$

Le petit paramètre $\mu \in [0,1]$ normalise les termes de la matrice. Les sous matrices ainsi obtenues sont notées : $\mathbf{A}_{12}^* = \mathbf{A}_{12} / \mu$, $\mathbf{A}_{22}^* = \mathbf{A}_{22} / \mu$, et $\mathbf{C}_2^* = \mathbf{C}_2 / \mu$ et la matrice \mathbf{A}_{11} est supposée inversible. Là aussi, μ peut être considéré comme étant le rapport :

$$\mu = \text{Error!} \quad (\text{I.86})$$

Remarque

Le rôle de l'homogénéisation des termes de la matrice \mathbf{A} est de combler une disproportion entre les matrices \mathbf{A}_{12} et \mathbf{A}_{22} par rapport aux matrices \mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{21} . L'influence de la partie lente sur la rapide est plus importante que celle de la partie rapide sur la lente. Cette modélisation peut être obtenue à partir de celle de Phillips en posant $j = 0$ ou encore par simple changement de base diagonal.

q

b) Découplage des dynamiques

- Partie lente -

Après la phase initiale, dans laquelle l'évolution de la partie rapide est très importante, l'influence des modes rapides devient négligeable. Ceci nous amène à considérer l'hypothèse $\mu = 0$ pour l'étude de la partie lente.

-Partie rapide -

Pour définir la partie rapide du système, nous supposons que la composante rapide relative à \mathbf{x}_n s'éteint rapidement, ce qui nous permet d'écrire $\mathbf{x}_{n+1} = 0$ avec le changement de variables :

$$\mathbf{x}_{nr} = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{nl}, \quad \mathbf{z}_{nr} = \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{nl}, \quad \mathbf{u}_{nr} = \mathbf{U}_n - \mathbf{u}_{nl} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_{nr} = \mathbf{Y}_n - \mathbf{y}_{nl}.$$

Avec ces hypothèses, nous obtenons le système découplé :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{pmatrix}_n \\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_l & \mathbf{C}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix}_n + \mathbf{D}_r \mathbf{u}_{rn} \\ \mathbf{z}_{ln} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{x}_{ln} + \mathbf{B}_r \mathbf{u}_{ln} \end{cases} \quad (\text{I.87})$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \mathbf{A}_l &= \mathbf{A}_{11}, \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}, \\ \mathbf{B}_l &= \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1, \\ \mathbf{C}_l &= \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}, \\ \mathbf{D}_r &= -\mathbf{C}_1 \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1, \end{aligned}$$

ainsi que les conditions initiales suivantes : $\mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{z}_r(0) = \mathbf{z}_0 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{x}_0.$$

L'approche ainsi obtenue devient :

$$\mathbf{x}_n \cong \mathbf{x}_l(n) \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_n \cong \mathbf{z}_r(n) + \mathbf{z}_l(n) \quad (\text{I.88})$$

sur tout l'intervalle de temps considéré.

L'étude du système initial revient donc à étudier deux sous-systèmes découplés (lent et rapide). Plus la propriété de double échelle de temps est marquée (μ petit), plus l'approche donnée par cette méthode est satisfaisante.

La méthode de découplage donne une partie lente qui ne prend pas en compte l'évolution de la partie rapide. Par contre, la partie rapide comporte l'influence de la partie lente et présente ainsi une approximation précise d'approximation.

III.2.3. Modélisation de Bennis [MAH, 82], [BEN, 82]

Dans son étude, Bennis ne propose pas de modélisation sous forme singulièrement perturbée. De ce fait, l'étude se fait directement sur le système initial partitionné (I.71).

a) Découplage des dynamiques

- Partie lente -

Partant du modèle décrit par les équations (I.71), le sous-système lent est obtenu en supposant qu'en dehors d'un petit intervalle de temps $[0, N_r]$ correspondant à la durée de vie du régime transitoire de la partie rapide, l'effet des modes rapides est négligeable par rapport à celui des modes lents. On peut par conséquent poser :

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n = \mathbf{z}_l(n), \quad \text{à } n > N_r \quad (\text{I.89})$$

Si la matrice

Error!

- Partie rapide -

Les équations qui décrivent le sous-système rapide sont obtenues en définissant sa variable d'état \mathbf{z}_{nr} , son vecteur de commande \mathbf{u}_{nr} et son vecteur de sortie \mathbf{y}_{nr} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{nr} &= \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{nl} \\ \mathbf{u}_{nr} &= \mathbf{U}_n - \mathbf{u}_{nl} \\ \mathbf{y}_{nr} &= \mathbf{Y}_n - \mathbf{y}_{nl} . \end{aligned} \quad (\text{I.90})$$

où les variables \mathbf{z}_{nl} , \mathbf{u}_{nl} et \mathbf{y}_{nl} sont celles qui interviennent dans le sous-système lent. Les commandes \mathbf{u}_{nl} et \mathbf{u}_{nr} représentent respectivement la composante lente et la composante rapide de la commande \mathbf{U}_n .

En prenant en compte ces hypothèses, le système (I.71) se trouve partitionné comme suit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{pmatrix}_n \\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_l & \mathbf{C}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{z}_r \end{pmatrix}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{pmatrix}_n \\ \mathbf{z}_{ln} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} (\mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_{ln} + \mathbf{B}_r \mathbf{u}_{ln}) \end{cases} \quad (\text{I.91})$$

avec : $\mathbf{A}_l = \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{22}$,

$\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_2$,

$\mathbf{C}_l = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_2$,

$\mathbf{D}_l = \mathbf{C}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{B}_2$.

ainsi que les conditions initiales suivantes : $\mathbf{x}_l 0 = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{z}_r 0 = \mathbf{z}_0 - (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_0.$$

L'approche ainsi obtenue devient :

$$\mathbf{x}_n \cong \mathbf{x}_{ln} \text{ et } \mathbf{z}_n \cong \mathbf{z}_{rn} + \mathbf{z}_{ln} \quad (\text{I.92})$$

Le système lent obtenu par ce découplage est précis. Par contre, le système rapide est imprécis, vu qu'il ne prend pas en compte l'évolution des variables lentes.

Nous avons vu que pour les différentes méthodes de découplage relatives aux différentes modélisations sous forme singulièrement perturbée en discret, les systèmes découplés sont obtenus avec des précisions différentes. Pour avoir un terme de comparaison avec le cas continu, nous présentons par la suite le principe de découplage des systèmes discrets en utilisant les perturbations singulières en continu.

III.3. Utilisation des perturbations singulières en continu pour la simplification des systèmes discrets

La méthode consiste à associer au système discret étudié, un système continu équivalent, par une transformation adéquate. Sur ce dernier, nous appliquons les perturbations singulières en

continu. Les sous-systèmes découplés se caractérisent par une grande précision de la partie lente et peuvent être transformés en discret en effectuant une opération inverse.

Dans un premier temps, nous présentons la transformation utilisée, pour ensuite donner la démarche complète de l'étude.

III.3.1. Transformations homographiques

Pour améliorer la précision de la partie lente d'un système discret, El Moudni propose dans [ELM, 85] l'utilisation de la transformation *homographique* en w [BOR, 74] couplée avec les techniques de perturbations singulières en continu. Le principe des transformations homographiques consiste à passer d'un système discret à un système continu équivalent. Nous présentons les éléments de base de cette transformation, avec ses deux versions : directe (passage du discret en continu) et inverse (passage du continu au discret).

a) Transformation homographique directe

Soit le système discret modélisé par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_n + \mathbf{B} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{C} \mathbf{X}_n \end{cases} \quad \text{conditions initiales } \mathbf{X}_0 \quad (I.93)$$

En considérant :

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n = \dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{X}_n}{2} = \mathbf{X}, \quad (I.94)$$

et par la suite en introduisant une moyenne des sorties et des commandes :

$$\left(\frac{\mathbf{Y}_{n+1} + \mathbf{Y}_n}{2} \right) = \mathbf{Y} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{U}_n}{2} \right) = \mathbf{U}, \quad (I.95)$$

nous obtenons **Error!**est régulière) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{I}}{2} \right)^{-1} \mathbf{X} + \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{I}}{2} \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{X} \end{cases} \quad (I.96)$$

Nous pourrions ainsi associer au triplet **A, B, C**, le triplet **M, F, C** du système continu correspondant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \mathbf{X} + \mathbf{F} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{X} \end{cases} \quad \text{conditions initiales } \mathbf{X}(0) \quad (I.97)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{M} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{I}}{2} \right)^{-1} \\ \mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{I}}{2} \right)^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} = \mathbf{C} \end{cases} \quad (\text{I.98})$$

b) Transformations homographiques inverses

Soit un système continu représenté par le système d'état (I.97). En posant :

$$\mathbf{X} + \frac{\dot{\mathbf{X}}}{2} = \mathbf{X}_{n+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{X} - \frac{\dot{\mathbf{X}}}{2} = \mathbf{X}_n \quad (\text{I.99})$$

et en notant par la suite :

$$\mathbf{Y} - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{2} = \mathbf{Y}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{U} - \frac{\dot{\mathbf{U}}}{2} = \mathbf{U}_n \quad (\text{I.100})$$

nous obtenons **Error!**est régulière) :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{M}}{2} \right) \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{M}}{2} \right)^{-1} \mathbf{X}_n + \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{M}}{2} \right)^{-1} \mathbf{F} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{C} \mathbf{X}_n \end{cases} \quad (\text{I.101})$$

Nous pouvons donc associer au triplet $\mathbf{M}, \mathbf{F}, \mathbf{C}$, le triplet $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ du système discret correspondant :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_n + \mathbf{B} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{C} \mathbf{X}_n \end{cases} \quad (\text{I.102})$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{M}}{2} \right) \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{M}}{2} \right)^{-1} \\ \mathbf{B} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{M}}{2} \right)^{-1} \mathbf{F} \end{cases} \quad (\text{I.103})$$

c) Conservation des conditions initiales

Les conditions initiales des systèmes continu et discret se conservent après l'application des transformations homographiques [ELM, 85]. Avec les notations (I.93) et (I.97) des conditions initiales, nous avons ainsi l'égalité suivante :

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$$

III.3.2. Utilisation conjointe des perturbations singulières en continu et des transformations homographiques pour l'étude des systèmes discrets à double échelle de

temps

Le principe de la méthode consiste à appliquer les perturbations singulières sur le système continu obtenu par transformation homographique directes. En continu, la partie lente découplée est très précise. Par conséquent, l'utilisation des transformations homographiques inverses permet d'obtenir en discret une partie lente caractérisée par une bonne précision d'approximation.

La démarche de l'étude est synthétisée par le schéma suivant :

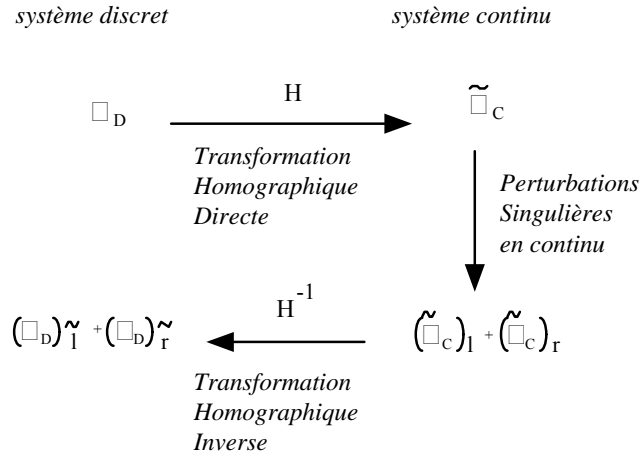


Fig. I.9. Utilisation conjointe des transformations homographiques et des perturbations singulières pour le découplage des dynamiques.

\square_D = système discret,

$\tilde{\square}_C$ = système continu équivalent, après transformations homographiques directes,

$(\tilde{\square}_C)_l$ = sous-système lent du système continu équivalent,

$(\tilde{\square}_C)_r$ = sous-système rapide du système continu équivalent,

$(\square_D)_l^\sim$ = sous-système lent du système discret, après transformations homographiques inverses,

$(\square_D)_r^\sim$ = sous-système rapide du système discret, après transformations homographiques inverses.

Soit le système d'état discret :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_n + \mathbf{B} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{C} \mathbf{X}_n \end{cases} \quad (\text{I.104})$$

Si ce système possède la propriété de double échelle de temps, nous pouvons écrire la forme partitionnée :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}_{(n+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}_n \end{cases} \quad (\text{I.105})$$

avec :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}_n \quad \text{et les conditions initiales} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}_0$$

\mathbf{x}_n représente la partie lente du vecteur d'état et \mathbf{z}_n la partie rapide.

Les transformations effectuées peuvent être regroupées dans le schéma suivant :

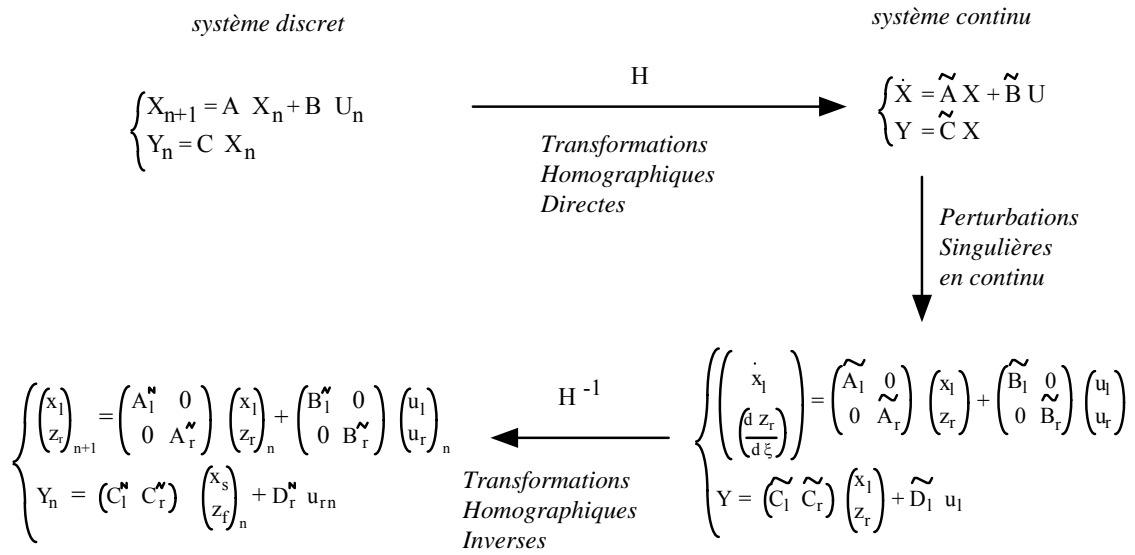


Fig. I.10. Systèmes d'état après transformations homographiques directes, découplage et transformations homographiques inverses.

Les matrices de la partie rapide obtenue à la fin des transformations sont :

$$\mathbf{A}_r^* = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{12} \quad (\text{I.106})$$

$$\mathbf{B}_r^* = \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{21} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (\text{I.107})$$

$$\mathbf{C}_r^* = \mathbf{C}_2 \quad (\text{I.108})$$

Pour la partie lente, nous avons :

$$\mathbf{A}_l^* = \left(\mathbf{A}_{11} - (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{12} (\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{21} \right) \left(\mathbf{I} + (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{12} (\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{21} \right)^{-1} \quad (\text{I.109})$$

$$\mathbf{B}_l^* = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12} (\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{21} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} \right)^{-1} \left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12} (\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}_r^* \right) \quad (\text{I.110})$$

$$\mathbf{C}_l^* = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{21} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} \quad (\text{I.111})$$

avec une transmission directe :

$$\mathbf{D}_1^* = -\mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}_r^* \quad (\text{I.112})$$

La partie rapide entraînée s'écrit :

$$\mathbf{z}_{1n}^* = 2(\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{21} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x}_{1n}^* \quad (\text{I.113})$$

Les conditions initiales du système final

$\mathbf{x}_{l_0}^*$ solution initiale de la partie lente et

$\mathbf{z}_{r_0}^*$ solution initiale de la partie rapide,

vérifient la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{l_0}^* \\ \mathbf{z}_{r_0}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -2(\mathbf{A}_r^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_{21} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I})^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.114})$$

IV. Conclusion

Dans une première partie du chapitre nous avons introduit les éléments de base des chaînes de Markov. La communication des états joue un rôle très important dans l'évolution du modèle. L'étude de son comportement revient à analyser l'évolution des chaînes de Markov irréductibles formées par les classes finales.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée aux différentes techniques de perturbations singulières dans le cas des systèmes linéaires continus et discrets échantillonnés. Dans le cas des systèmes continus la modélisation est unique, tandis que dans le cas discret il existe plusieurs modélisations. Parmi les modélisations rencontrées en discret, celle de Phillips présente un caractère générique, avec des cas particuliers correspondant aux modélisations El Moudni et de Bennis.

Dans le chapitre suivant, nous proposons d'adapter les différentes techniques de perturbations singulières pour la simplification des chaînes de Markov irréductibles. Utilisées auparavant pour l'étude des systèmes déterministes continus ou discrets échantillonnés, ces méthodes seront donc appliquées dans le cas d'un système stochastique discret par nature. Nous montrons aussi la signification physique de la propriété de double échelle de temps dans le contexte probabiliste étudié.

